ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική

Βιβλίο Ασκήσεων

Δρ. Πολίτης Αναστάσιος, Καθηγητής Εφαρμογών

Δρ. Αναστασίου Χρήστος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Σέρρες, Μάιος 2012

(1η Έκδοση)

Πρόλογος

Το παρόν εγχειρίδιο αποτελεί μια προσπάθεια για την ενδυνάμωση των φοιτητών του Τμήματος Πληροφορικής και Επικοινωνιών του ΤΕΙ Σερρών στις θεματικές ενότητες που διδάσκονται στο 2^{o} Εξάμηνο σπουδών στα πλαίσια του μαθήματος "Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική". Έχει δομηθεί με τη σειρά που παρουσιάζονται οι θεματικές αυτές ενότητες στο βασικό βιβλίο διδασκαλίας του κ. Γ. Χ. Ζιούτα. Παρέχει, με το τρόπο αυτό, συμπληρωματική εξάσκηση των φοιτητών σε προβλήματα που μπορούν να τους βοηθήσουν στην καλύτερη και σε βάθος κατανόηση του αντικειμένου που διδάσκεται στο θεωρητικό μέρος του μαθήματος. Στην ουσία πρόκειται για μια συλλογή ασκήσεων που έχουν βρεθεί σε εγχειρίδια (βιβλία και σημειώσεις) και τα οποία αναφέρονται στη βιβλιογραφία. Σε καμία περίπτωση δεν αποτελεί ικανό εργαλείο για την επιτυχή εξέταση του μαθήματος, εφόσον μελετηθεί μόνον αυτό.

Φιλοδοξώντας να υπάρξουν νεότερες εκδόσεις του παρόντος εγχειριδίου με ακόμα περισσότερες και διαβαθμισμένου δείκτη δυσκολίας ασκήσεις πράξης στο μέλλον, επιζητείται κάθε καλοπροαίρετη πρόταση (ειδικά από τους φοιτητές του Τμήματος μας). Τέλος, είναι αυτονόητο ότι κάθε επισήμανση/παρατήρηση/εύρεση λαθών, είναι ευπρόσδεκτες από τους συγγραφείς.

Α. Πολίτης

Χ. Αναστασίου

Περιεχόμενα

1. Θεωρία Συνόλων

1.1 Δειγματοχώρος Τυχαίου Πειράματος

Άσκηση 1. Να βρεθούν οι δειγματοχώροι των τυχαίων πειραμάτων:

α) Ρίψη ενός (τίμιου) κέρματος.

β) Ρίψη ενός (τίμιου) ζαριού.

γ) Επαναλαμβανόμενη ρίψη ενός (τίμιου) κέρματος μέχρι να εμφανιστεί Κορώνα για πρώτη φορά.

Λύση:

α) Ο δειγματοχώρος (πεπερασμένος) ενός κέρματος είναι:

$$S = \{\mathrm{K}, \Gamma\}$$

Με Κ: Κορώνα και Γ: Γράμματα.

β) Ο δειγματοχώρος (πεπερασμένος) ενός ζαριού είναι:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

γ) Ο κατάλληλος δειγματοχώρος (άπειρος αλλά αριθμήσιμος) για το συγκεκριμένο πείραμα θα είναι:

$$S = \{\mathrm{K}, \Gamma\mathrm{K}, \Gamma\Gamma\mathrm{K}, \Gamma\Gamma\Gamma\mathrm{K}, \Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\mathrm{K}, \Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\mathrm{K}, ..., \Gamma\Gamma\Gamma\Gamma....\mathrm{K}, ...\}$$

Με Κ: Κορώνα και Γ: Γράμματα.

Άσκηση 2. Να βρεθούν οι δειγματοχώροι των τυχαίων πειραμάτων:

α) Ρίψη δύο (τίμιων) κερμάτων ταυτόχρονα.

β) Ρίψη δύο (τίμιων) ζαριών ταυτόχρονα.

γ) Ρίψη ενός (τίμιου) κέρματος και ενός (τίμιου) ζαριού ταυτόχρονα.

Λύση:

Και στις τρείς περιπτώσεις ο κατάλληλος (σύνθετος) δειγματοχώρος προκύπτει από το καρτεσιανό γινόμενο των επιμέρους δειγματοχώρων $S_1 \times S_2$.

α) Οι επιμέρους δειγματοχώροι θα είναι:

$$S_1 = \{K, \Gamma\} \quad \kappa\alpha\iota \quad S_2 = \{K, \Gamma\}$$

Επομένως ο δειγματοχώρος του πειράματος θα είναι:

$$S = S_1 \times S_2 = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$$

β) Αναλόγως θα έχουμε:

$$S_1 = \{1,2,3,4,5,6\} \quad \kappa\alpha\iota \quad S_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$S = S_1 \times S_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(2,1),(2,2),(2,3),\ldots,(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

γ) Παρομοίως:

$$S_1 = \{K, \Gamma\} \quad \kappa\alpha\iota \quad S_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$S = S_1 \times S_2 = \{(K,1),(K,2),(K,3),\ldots,(\Gamma,4),(\Gamma,5),(\Gamma,6)\}$$

Άσκηση 3. Τρία άτομα (Α, Β και Γ) τοποθετούνται τυχαία σε τρία διαδοχικά καθίσματα. Ποιός είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;

Λύση:

Ο δειγματικός χώρος θα είναι:

$$S = \{(AB\Gamma),(A\Gamma B),(BA\Gamma),(B\Gamma A),(\Gamma AB),(\Gamma BA)\}$$

Άσκηση 4. Ένα κουτί περιέχει δύο μπάλες, μια άσπρη και μια μαύρη. Εκτελούμε το ακόλουθο πείραμα: αφαιρούμε τυχαία μια μπάλα, την επανατοποθετούμε μέσα στο κουτί και κάνουμε μια δεύτερη προσπάθεια. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.

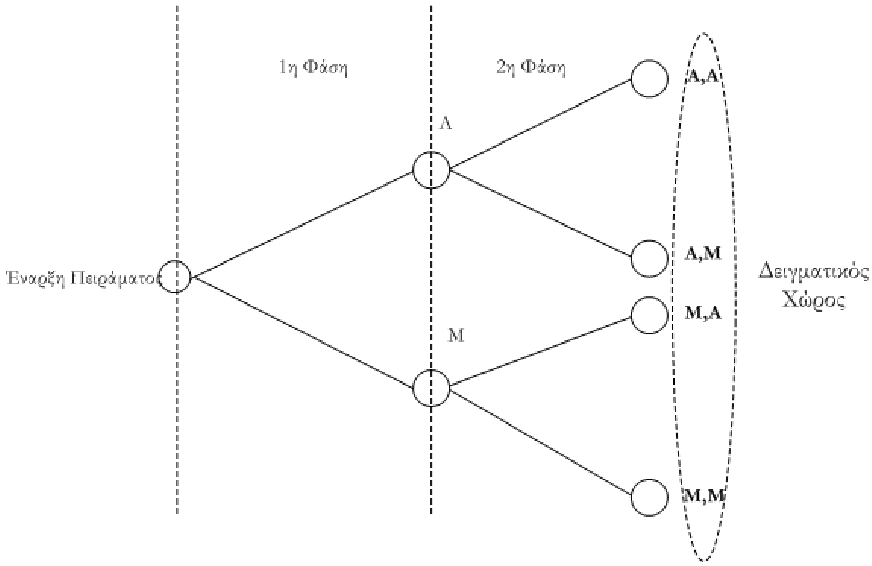
Λύση:

Στην πρώτη προσπάθεια ενδέχεται να αφαιρέσουμε είτε την μαύρη είτε την άσπρη μπάλα. Εφόσον επανατοποθετούμε την μπάλα της πρώτης προσπάθειας μέσα στο κουτί, η δεύτερη προσπάθεια θα έχει τα ίδια πιθανά αποτελέσματα. Επομένως, ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι:

$$S = \{(A, A),(A, M),(M, A),(M, M)\}$$

Με Α: Άσπρη και Μ: Μαύρη.

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να οδηγηθούμε κάνοντας χρήση και του δενδροδιαγράμματος. Το δενδροδιάγραμμα είναι ένας παραστατικός τρόπος για να περιγράψουμε την εκτέλεση του τυχαίου πειράματος και αποτελεί πολλές φορές ένα αρκετά βοηθητικό εργαλείο. Για το συγκεκριμένο πείραμα το δενδροδιάγραμμα δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Άσκηση 5. Ένας φοιτητής εξετάζεται προφορικά σε τέσσερις διαδοχικές ερωτήσεις. Η εξέταση διακόπτεται όταν ο φοιτητής απαντήσει λάθος στην πρώτη ερώτηση ή σε δύο διαδοχικές. Τότε απορρίπτεται. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.

Λύση:

Εάν συμβολίσουμε με Λ την λάθος απάντηση σε μία ερώτηση και με Σ την σωστή, ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι:

$$S = \{(\Lambda), (\Sigma\Lambda\Lambda), (\Sigma\Lambda\Sigma\Sigma), (\Sigma\Lambda\Sigma\Lambda), (\Sigma\Sigma\Lambda\Sigma), (\Sigma\Sigma\Lambda\Lambda), (\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma), (\Sigma\Sigma\Sigma\Lambda)\}$$

•

1.2 Γεγονότα.

Ασκηση 1. Μετά την ρίψη ενός (τίμιου) ζαριού να προσδιοριστούν τα γεγονότα:

α) Α: η ένδειξη να είναι άρτιος αριθμός.

β) Β: η ένδειξη να είναι μικρότερη από 3.

Λύση:

α) Το γεγονός Α θα περιλαμβάνει τα εξής δειγματοσημεία:

$$A = \{2,4,6\}$$

β) Το γεγονός Β θα περιλαμβάνει τα εξής δειγματοσημεία:

$$B = \{1,2\}$$

Άσκηση 2. Τρία άτομα (Α, Β και Γ) τοποθετούνται τυχαία σε τρία διαδοχικά καθίσματα. Να βρεθούν τα γεγονότα E_1= ο Α να είναι δίπλα στον Β, και E_2=ο Α δεν είναι δίπλα στον Γ.

Λύση:

Όπως παρουσιάστηκε σε προηγούμενη άσκηση ο δειγματικός χώρος θα είναι:

$$S = \{(\mathrm{AB\Gamma}), (\mathrm{A\Gamma B}), (\mathrm{BA\Gamma}), (\mathrm{B\Gamma A}), (\mathrm{\Gamma AB}), (\mathrm{\Gamma BA})\}$$

Από τα παραπάνω δειγματοσημεία, αυτά στα οποία ο Α είναι δίπλα στον Β είναι το (ΑΒΓ), (ΒΑΓ), (ΓΑΒ) και (ΓΒΑ). Επομένως το γεγονός E_1 θα είναι:

$$E_1 = \{(\mathrm{AB\Gamma}), (\mathrm{BA\Gamma}), (\mathrm{\Gamma AB}), (\mathrm{\Gamma BA})\}$$

Αναλόγως και για το E_2:

$$E_2 = \{(\mathrm{AB\Gamma}), (\mathrm{\Gamma BA})\}$$

Άσκηση 3. Ένας φοιτητής εξετάζεται προφορικά σε τέσσερις διαδοχικές ερωτήσεις. Η εξέταση διακόπτεται όταν ο φοιτητής απαντήσει λάθος στην πρώτη ερώτηση ή σε δύο διαδοχικές. Τότε απορρίπτεται. Να βρεθούν τα γεγονότα: Α=ο φοιτητής απορρίφθηκε, Β=ο φοιτητής απάντησε λάθος στην τρίτη ερώτηση, Γ=ο φοιτητής απάντησε λάθος στην τέταρτη ερώτηση, Δ=ο φοιτητής πέρασε, Ε=ο φοιτητής απάντησε λάθος στην τρίτη ερώτηση και πέρασε.

Λύση:

Σε προηγούμενη άσκηση προσδιορίσθηκε ο δειγματοχώρος του πειράματος όπως; παρακάτω:

$$S = \{(\Lambda), (\Sigma\Lambda\Lambda), (\Sigma\Lambda\Sigma\Sigma), (\Sigma\Lambda\Sigma\Lambda), (\Sigma\Sigma\Lambda\Sigma), (\Sigma\Sigma\Lambda\Lambda), (\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma), (\Sigma\Sigma\Sigma\Lambda)\}$$

Εφόσον ο φοιτητής απορρίπτεται με λάθος απάντηση στην πρώτη ερώτηση ή σε δύο διαδοχικές, το γεγονός Α θα είναι:

$$\mathrm{A} = \{(\Lambda), (\Sigma\Lambda\Lambda), (\Sigma\Sigma\Lambda\Lambda)\}$$

Το γεγονός Β:

$$\mathrm{B} = \{(\Sigma\Lambda\Lambda), (\Sigma\Sigma\Lambda\Sigma), (\Sigma\Sigma\Lambda\Lambda)\}$$

Το γεγονός Γ:

$$\Gamma = \{(\Sigma\Lambda\Sigma\Lambda), (\Sigma\Sigma\Lambda\Lambda), (\Sigma\Sigma\Sigma\Lambda)\}$$

Το γεγονός Δ:

$$\Delta = \{(\Sigma\Lambda\Sigma\Sigma), (\Sigma\Lambda\Sigma\Lambda), (\Sigma\Sigma\Lambda\Sigma), (\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma), (\Sigma\Sigma\Sigma\Lambda)\}\}$$

Το γεγονός Ε θα προκύψει από την τομή των γεγονότων Β (ο φοιτητής απάντησε λάθος στην τρίτη ερώτηση) και Δ (ο φοιτητής πέρασε):

$$\mathrm{E} = \mathrm{B} \cap \Delta = \{((\Sigma\Sigma\Lambda\Sigma)\}\}$$

Άσκηση 4. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8\}$ και ορίζουμε τα γεγονότα $A_1 = \{s_1, s_2, s_3\}$, $A_2 = \{s_2, s_3, s_4, s_5\}$, $A_3 = \{s_3, s_4, s_5, s_8\}$. Να εκφραστούν με συμβολισμό συνόλων οι ακόλουθες περιπτώσεις: α) $A_1^{\ c}$, β) $A_2^{\ c}$,γ) $A_1^{\ c}$, δ) $A_1 \cup A_2$, ε) $A_1 \cup A_3$, ζ) $A_2 \cup A_3$, η) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, θ) $A_1 \cap A_2$, ι) $A_1 \cap A_3$, κ) $A_2 \cap A_3$, λ) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$, μ) $A_1 - A_2$, ν) $A_2 - A_1$, ξ) $A_1 - A_3$, ο) $A_3 - A_1$, π) $A_2 - A_3$, ϱ) $A_3 - A_2$, σ) $\left(A_1^c\right)^c$, τ) $\left(A_2^c\right)^c$.

Λύση:

α) Το συμπλήρωμα του γεγονότος A_1 θα είναι το γεγονός το οποίο ορίζεται ως εξής: $A_1^{\ c} = \{s \in S : s \notin A_1\}$ (Εναλλακτικά μπορεί να ειπωθεί ότι: το συμπλήρωμα ενός γεγονότος συμβαίνει κάθε φορά που δεν συμβαίνει το γεγονός αυτό). Επομένως: $A_1^c = \{s_4, s_5, s_6, s_7, s_8\}$.

β) Ομοίως: $A_2^c = \{s_1, s_6, s_7, s_8\}$.

γ) Ομοίως: $A_3^c = \{s_1, s_2, s_6, s_7\}$.

δ) Η ένωση των γεγονότων A_1 και A_2 περιλαμβάνει όλα τα δειγματοσημεία που ανήκουν στο A_1 **ή** στο A_2 **ή** και στα δύο. Επομένως: $A_1 \cup A_2 = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$.

ε) Ομοίως: $A_1 \cup A_3 = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_8\}$.

ζ) Ομοίως: $A_2 \cup A_3 = \{s_2, s_3, s_4, s_5, s_8\}$.

η) Ομοίως: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_8\}$.

θ) Η τομή των γεγονότων A_1 και A_2 περιλαμβάνει όλα τα δειγματοσημεία που ανήκουν **και** στο A_1 **και** στο A_2. Επομένως: $A_1 \cap A_2 = \{s_2, s_3\}$.

ι) Ομοίως: $A_1 \cap A_3 = \{s_3\}$.

κ) Ομοίως: $A_2 \cap A_3 = \{s_3, s_4, s_5\}$.

λ) Ομοίως: $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{s_3\}$.

μ) Η διαφορά των γεγονότων A_1 και A_2 περιλαμβάνει όλα τα δειγματοσημεία που ανήκουν στο A_1 και **όχι** στο A_2. Εναλλακτικά: $A_1 - A_2 = \{s \in S : s \in A_1, s \notin A_2\}$. Άρα: $A_1 - A_2 = \{s_1\}$.

ν) Ομοίως: $A_2 - A_1 = \{s_4, s_5\}$.

ξ) Ομοίως: $A_1 - A_3 = \{s_1, s_2\}$.

ο) Ομοίως: $A_3 - A_1 = \{s_4, s_5, s_8\}$.

π) Ομοίως: $A_2 - A_3 = \{s_2\}$.

ϱ) Ομοίως: $A_3 - A_2 = \{s_8\}$.

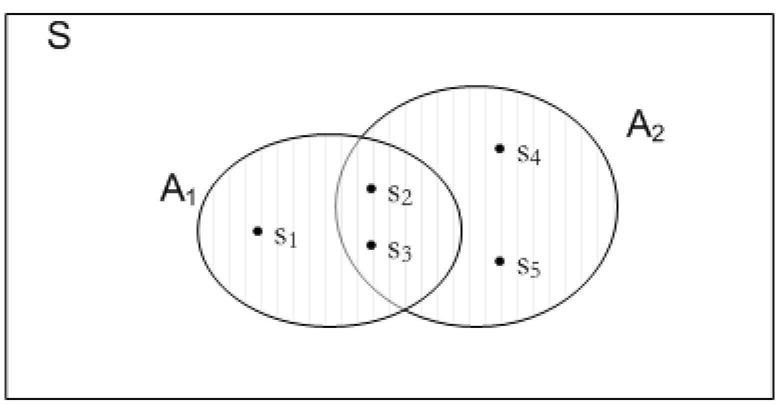
σ) Το συμπλήρωμα του συμπληρώματος του γεγονότος A_1 θα είναι, προφανώς, το A_1. Εναλλακτικά: $\left(A_1^c\right)^c = \{s_1, s_2, s_3\}(= A_1)$.

τ) Ομοίως: $\left(A_2^c\right)^c = \{s_2, s_3, s_4, s_5\}(= A_2)$.

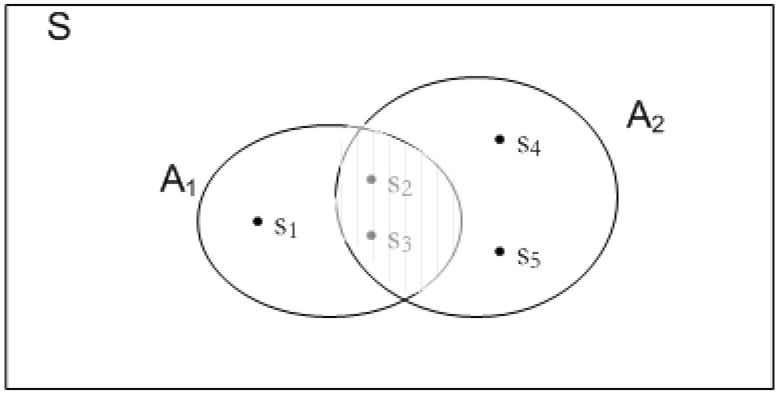
Άσκηση 5. Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα Venn για τα ερωτήματα δ), θ) και μ) της προηγούμενης άσκησης.

Λύση:

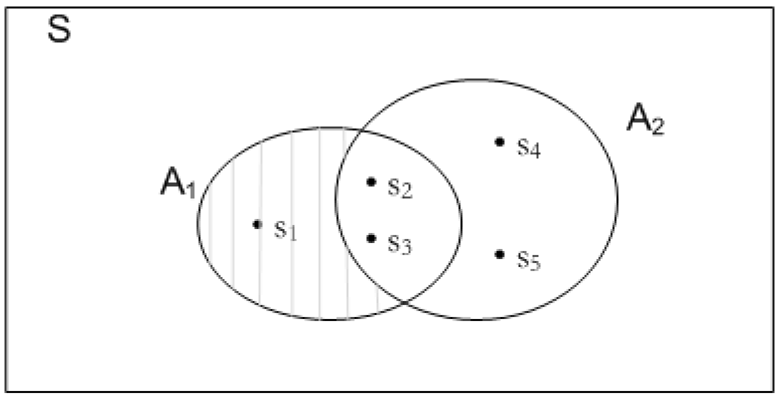
Το ερώτημα δ) ορίζει την ένωση των γεγονότων A_1 και A_2. Περιλαμβάνει δηλαδή όλα τα στοιχεία πουτ ανήκουν είτε στο ένα είτε στο άλλό γεγονός είτε και στα δύο.



Το ερώτημα θ) ορίζει την τομή των γεγονότων A_1 και A_2. Περιλαμβάνει δηλαδή τα δειγματοσημεία που είναι κοινά στα δύο γεγονότα.



Το ερώτημα μ) ορίζει την διαφορά των γεγονότων A_1 και A_2. Περιλαμβάνει δηλαδή όλα τα δειγματοσημεία που ανήκουν στο A_1 και όχι αυτά που ανήκουν στο A_2.



Άσκηση 6. Έστω τα γεγονότα A_1, A_2 και A_3 για κάποιο δειγματικό χώρο S. Κάνοντας χρήση των γεγονότων αυτών, των συμπληρωμάτων τους, των ενώσεων και των τομών τους να εκφραστούν τα παρακάτω γεγονότα:

α) D_i= "το γεγονός A_i δεν πραγματοποιείται", όπου i=1,2,3.

β) E= "όλα τα γεγονότα A_1, A_2 και A_3 πραγματοποιούνται".

γ) F= "δεν πραγματοποιείται κανένα από τα γεγονότα A_1, A_2 και A_3".

δ) G= "τουλάχιστον ένα από τα γεγονότα A_1, A_2 και A_3 πραγματοποιείται".

ε) H= "ακριβώς δύο από τα γεγονότα A_1, A_2 και A_3 πραγματοποιείται".

ζ) I= "ακριβώς ένα από τα γεγονότα A_1, A_2 και A_3 πραγματοποιείται".

η) Να βρεθεί εναλλακτική έκφραση για το γεγονός G που να περιλαμβάνει κάποιο ή κάποια από τα γεγονότα των υπόλοιπων ερωτημάτων.

(μπορείτε να βοηθηθείτε κάνοντας τα διαγράμματα Venn).

Λύση:

α) Το γεγονός D_i είναι ισοδύναμο με το συμπλήρωμα του γεγονότος A_i. Δηλαδή:

$$D_1 = A_1^c, D_2 = A_2^c, D_3 = A_3^c$$

β) Τα γεγονότα A_1, A_2 και A_3 πραγματοποιούνται ταυτόχρονα όταν πραγματοποιείται η τομή τους. Δηλαδή:

$$E = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

γ) Για να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα γεγονότα A_1, A_2 και A_3 θα πρέπει να πραγματοποιηθεί η τομή των συμπληρωμάτων τους (το αντίθετο του προηγούμενου ερωτήματος). Δηλαδή:

$$F = A_1^{\ c} \cap A_2^{\ c} \cap A_3^{\ c}$$

δ) Για να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα γεγονότα αρκεί να πραγματοποιηθεί είτε το A_1 είτε το A_2 είτε το A_3. Δηλαδή, η ένωση τους:

$$G = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

ε) Για να πραγματοποιηθούν ακριβώς δύο από τα τρία, θα πρέπει να πραγματοποιηθεί η τομή δυο γεγονότων με το συμπλήρωμα του τρίτου. Κάνοντας ένα διάγραμμα Venn μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι:

$$H = \left(A_1 \cap A_2 \cap A_3^{\ c}\right) \cup \left(A_1 \cap A_2^{\ c} \cap A_3\right) \cup \left(A_1^{\ c} \cap A_2 \cap A_3\right)$$

ζ) Με ανάλογο τρόπο με αυτόν του προηγούμενου ερωτήματος:

$$I = \left(A_1 \cap A_2^{\ c} \cap A_3^{\ c}\right) \cup \left(A_1^{\ c} \cap A_2^{\ c} \cap A_3\right) \cup \left(A_1^{\ c} \cap A_2 \cap A_3^{\ c}\right)$$

η) Εύκολα μπορεί κανείς να καταλήξει ότι για να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα τρία γεγονότα A_1, A_2 και A_3 πρέπει να συμβεί είτε η τομή και των τριών τους (το γεγονός Ε δηλαδή) είτε ακριβώς δύο από τα τρία (το γεγονός Η) είτε ακριβώς ένα από τα τρία (το γεγονός Ι). Δηλαδή:

$$G = \mathrm{E} \cup \mathrm{H} \cup \mathrm{I}$$

Άσκηση 7. Να επαληθευτεί ο νόμος του DeMorgan με τη χρήση των διαγραμμάτων Venn.

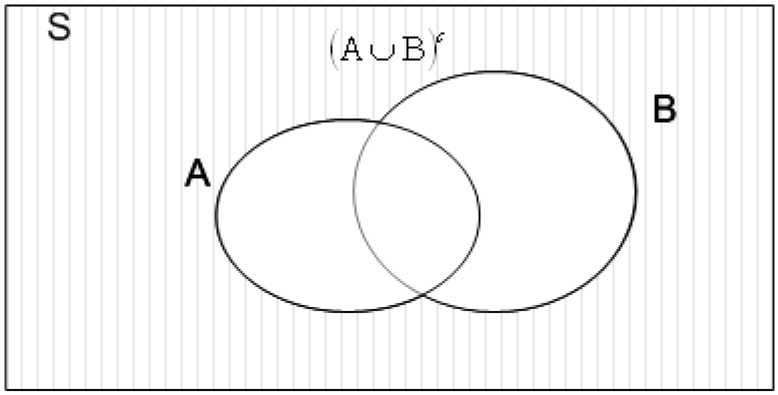
Λύση:

Ο νόμος του DeMorgan για δύο γεγονότα Α και Β ορίζει:

$$(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^c = \mathrm{A}^c \cap \mathrm{B}^c \quad \kappa\alpha\iota \quad (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})^c = \mathrm{A}^c \cup \mathrm{B}^c$$

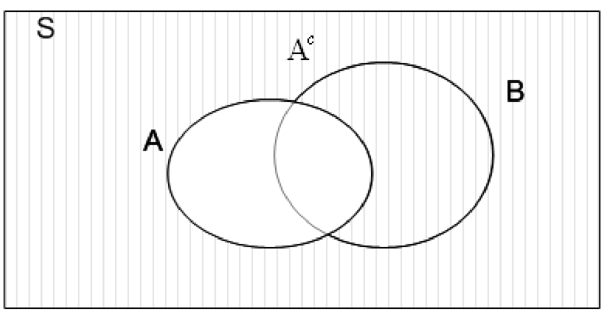
Ας εξετάσουμε την πρώτη ισότητα, καθώς η επαλήθευση της δεύτερης μπορεί να γίνει με ανάλογο τρόπο.

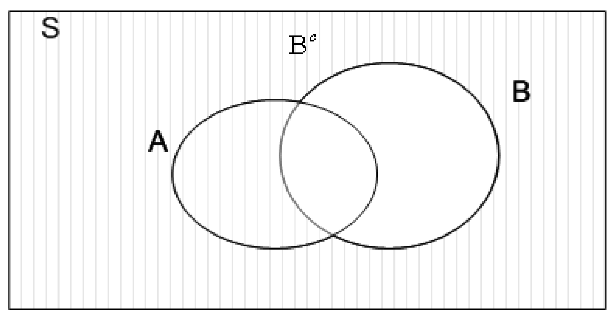
Το διάγραμμα Venn για το πρώτο μέρος της ισότητας (το συμπλήρωμα της ένωσης των γεγονότων A και B) μπορεί να σχεδιαστεί όπως στο παρακάτω σχήμα.



Άς εξετάσουμε τώρα ένα ένα ξεχωριστά, τα μέλη του δεύτερου μέρους της ισότητας.

Το συμπλήρωμα του γεγονότος A και το συμπλήρωμα του γεγονότος B θα σχηματιστούν όπως παρακάτω:





Η τομή των συμπληρωμάτων των δύο γεγονότων A και B μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί ως ο χώρος που περιβάλλει την ένωση των δύο γεγονότων, καταλήγοντας έτσι στο πρώτο διάγραμμα Venn που σχεδιάσαμε.

Με τον παραπάνω τρόπο μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε τον νόμο του DeMorgan και για περισσότερα του ενός γεγονότα.

•

2. Εισαγωγή στις Πιθανότητες

2.1 Κλασσικός Ορισμός της Πιθανότητας.

Άσκηση 1. Εκτελούμε το ακόλουθο πείραμα: ρίχνουμε ταυτόχρονα δύο τίμια ζάρια και σημειώνουμε το άθροισμα των ενδείξεων τους. Να βρεθούν:

α) η πιθανότητα το άθροισμα να είναι άρτιος αριθμός.

β) η πιθανότητα το άθροισμα να είναι 4.

γ) η πιθανότητα το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο του 9.

Λύση:

Σύμφωνα με τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας, θα πρέπει να προσδιορίσουμε το σύνολο των δειγματοσημείων του πειράματος. Για το συγκεκριμένο πείραμα αυτό μπορεί να γίνει κατασκευάζοντας έναν πίνακα που περιλαμβάνει όλα τα πιθανά αθροίσματα:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

α) Από τον παραπάνω πίνακα μπορούμε εύκολα να εντοπίσουμε όλα τα άρτια αθροίσματα (18), καθώς και το σύνολο των δειγματοσημείων (36) του πειράματος:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} = 0.5$$

β) Τα αθροίσματα των ενδείξεων που είναι ίσα με 4, είναι 3 στο σύνολο τους: (1,3), (2,2), (3,1). Επομένως, το γεγονός Β= "το άθροισμα των ενδείξεων των δύο ζαριών να είναι 4" αποτελείται από 3 δειγματοσημεία:

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}\approx 0{,}083$$

γ) Το γεγονός G= "το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο από 9" αποτελείται από 6 δειγματοσημεία: G={(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)}. Επομένως:

$$P(B)=\frac{n(G)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}\approx 0{,}166$$

Άσκηση 2. Κάποιος παίκτης παίζει το παραπάνω παιχνίδι ρίψης των δύο (τίμιων) ζαριών. Κερδίζει όταν το άθροισμα τους είναι 7 ή 11, ενώ χάνει όταν είναι 2, 3 ή 12. Για οποιοδήποτε άλλο αποτέλεσμα δεν υπάρχει νικητής και το παιχνίδι επαναλαμβάνεται από την αρχή. Να βρεθούν:

α) η πιθανότητα ο παίκτης να κερδίσει το παιχνίδι.

β) η πιθανότητα ο παίκτης να χάσει το παιχνίδι.

Λύση:

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα που κατασκευάσαμε στην προηγούμενη άσκηση για να υπολογίσουμε τις πιθανότητες εμφάνισης των αθροισμάτων των ενδείξεων των δύο ζαριών. Κατασκευάζουμε, λοιπόν, τον παρακάτω πίνακα:

Άθροισμα	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Πιθανότητα	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

α) η πιθανότητα ο παίκτης να κερδίσει ένα οποιοδήποτε παιχνίδι (P(N)) θα είναι προφανώς η ένωση των γεγονότων: A="το άθροισμα της ρίψης των ζαριών είναι 7" και B="το άθροισμα της ρίψης των ζαριών είναι 11". Άρα:

$$P(N)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Αφού τα γεγονότα αυτά είναι ξένα τότε θα ισχύει: $P(A\cap B)=\varnothing$ και επομένως:

$$P(N)=P(A)+P(B)=6/36+2/36=8/36\approx 0{,}222$$

β) με ανάλογο τρόπο η πιθανότητα ο παίκτης να χάσει ένα οποιοδήποτε παιχνίδι (P(X)) θα είναι:

$$P(X)=1/36+2/36+1/36=4/36=1/9\approx 0{,}111$$

Άσκηση 3. Δύο φίλοι (Χ και Υ) παίζουν ένα παιχνίδι με ένα τίμιο κέρμα. Ρίχνουν το κέρμα μια φορά και κατόπιν μια δεύτερη. Εάν έρθει Κεφαλή σε οποιαδήποτε από τις δύο ρίψεις, τότε κερδίζει ο Χ, ειδάλλως το παιχνίδι το κερδίζει ο Υ. Να βρεθεί η πιθανότητα να κερδίσει ο Χ την παρτίδα.

Λύση:

Το πρόβλημα αυτό αποτελεί ένα παράδειγμα του πόσο σημαντικό είναι ο σωστός προσδιορισμός του δειγματικού χώρου. Κάποιος θα μπορούσε να υποστηρίξει ότι ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι:

$$S = \{\text{ΚΚ}, \text{ΚΓ}, \text{ΓΚ}, \text{ΓΓ}\}$$

Αποτελείται, δηλαδή, ο δειγματοχώρος από τέσσερα δυνατά αποτελέσματα. Στα τρία από αυτά ο παίκτης Χ κερδίζει το παιχνίδι και επομένως η πιθανότητα νίκης του παίκτη Χ είναι ¾ (75%).

Κάποιος άλλος θα μπορούσε να πεί ότι εάν το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης είναι Κεφαλή τότε δεν υπάρχει λόγος να συνεχιστεί το παιχνίδι με την δεύτερη ρίψη καθώς από τους κανόνες του παιχνιδιού οποιοδήποτε αποτέλεσμα της δεύτερης ρίψης θα είναι ανούσιο (ο Χ θα έχει κερδίσει την παρτίδα ήδη από την πρώτη ρίψη). Άρα, ο κατάλληλος δειγματικός χώρος για την δεύτερη προσέγγιση θα είναι:

$$S = \{\text{Κ}, \text{ΓΚ}, \text{ΓΓ}\}$$

Δηλαδή, ο δειγματοχώρος αποτελείται από τρία δυνατά ενδεχόμενα, εκ των οποίων στα δύο ο Χ κερδίζει το παιχνίδι. Η πιθανότητα νίκης του Χ θα είναι 2/3 ~ 66%, και όχι 75% σύμφωνα με τον προηγούμενο συλλογισμό.

Ωστόσο, η δεύτερη προσέγγιση υποθέτει την ισοπίθανη πραγματοποίηση των ενδεχομένων, πράγμα το οποίο είναι λανθασμένο. Όπως θα φανεί σε επόμενες ασκήσεις (υπο συνθήκη πιθανότητα και ολική πιθανότητα) ο δειγματικός χώρος πράγματι είναι αυτός της δεύτερης προσέγγισης αλλά με διαφορετική κατανομή πιθανοτήτων για κάθε ενδεχόμενο.

•

3. Αρχές Απαρίθμησης

3.1 Κανόνας Γινομένου

Άσκηση 1.

α) Ντύσου επιλέγοντας ένα πουκάμισο, ένα παντελόνι, ένα ζευγάρι παπούτσια και ένα καπέλο, από n_1 πουκάμισα, n_2 παντελόνια, n_3 παπούτσια και n_4 καπέλα (με $n_1=4$, $n_2=3$, $n_3=n_4=2$).

β) Σχημάτισε όλους τους αριθμούς με k ψηφία, επιλέγοντας τα k ψηφία από n διαφορετικούς αριθμούς (με k=2, n=4).

γ) Σχημάτισε όλους τους δυνατούς κώδικες μήκους 4 ψηφίων κάνοντας χρήση των ψηφίων 0 και 1.

Λύση:

α) Εφαρμόζοντας τον κανόνα του γινομένου το σύνολο των τρόπων που μπορεί να ντυθεί ένα άτομο είναι:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$$

β) Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το πείραμα (ο σχηματισμός των αριθμών) ολοκληρώνεται σε k στάδια. Αφού σε κάθε στάδιο έχουμε n επιλογές, τότε εφαρμόζοντας τον κανόνα του γινομένου μπορούμε να πούμε ότι όλοι οι αριθμοί που μπορούν να σχηματιστούν είναι:

$$n \times n = 4 \times 4 = 16$$

γ) Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να πούμε ότι το πείραμα χωρίζεται σε 4 στάδια όπου έχουμε δύο επιλογές (0 και 1). Επομένως, εφαρμόζοντας τον κανόνα του γινομένου θα έχουμε:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$$

Επαληθέυστε το γ) ερώτημα με τη βοήθεια δενροδιαγράμματος.

Άσκηση 2. Να βρεθούν όλες οι δυνατές πινακίδες αυτοκινήτων της μορφής ΓΓΓαααα (όπου "Γ" είναι γράμμα της ελληνικής αλφαβήτου από ένα σύνολο 14 γραμμάτων, και "αααα" είναι ένας αριθμός από το 1000 μέχρι το 9999).

Λύση:

Ως γνωστόν οι ελληνικές πινακίδες διαθέτουν τρία γράμματα τα οποία μπορούν να ληφθούν από 14 διαφορετικές επιλογές {A,B,E,Z,H,I,K,M,N,O,P,T,Y,X} και τέσσερις αριθμούς εκ των οποίων ο πρώτος μπορεί να είναι 1-9 (δηλαδή εννιά δυνατότητες) και οι υπόλοιποι μπορεί να είναι από 0-9 (δηλαδή δέκα επιλογές). Σύμφωνα, λοιπόν, με τον κανόνα του γινομένου όλες οι πιθανές πινακίδες που μπορεί να κυκλοφορούν είναι:

$$14 \times 14 \times 14 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 14^3 \times 9000 = 24696000$$

Άσκηση 3: Πόσες λέξεις με πέντε γράμματα μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας τα 26 γράμματα του Αγγλικού αλφαβήτου, εάν:

α) Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.

β) Και τα πέντε γράμματα πρέπει να είναι διαφορετικά.

Λύση:

α) Εφόσον δεν υπάρχει κανένας περιορισμός (μπορεί η κάθε λέξη να έχει το ίδιο γράμμα πάνω από μία φορές), όλες οι δυνατές λέξεις θα είναι:

$$26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 = 26^5 = 11881376$$

β) Σε αυτή τη περίπτωση θα πρέπει το κάθε γράμμα να είναι διαφορετικό στην κάθε λέξη. Επομένως, το πρώτο γράμμα της λέξης μπορεί να είναι ένα από τα 26 διαθέσιμα, το δεύτερο γράμμα μπορεί να επιλεγεί από 25 (ένα έχει αφαιρεθεί αφού χρησιμοποιείται ως πρώτο γράμμα), το τρίτο επιλέγεται από 24 διαθέσιμα κ.ο.κ. Άρα, το σύνολο των λέξεων θα είναι:

$$26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 7893600$$

•

3.2 Μεταθέσεις και Συνδυασμοί

Άσκηση 1: Έχουμε τρία άτομα (Α, Β και Γ) σε μια τάξη.

α) Εάν θέλουμε να τα τοποθετήσουμε τυχαία σε τρία διαδοχικά καθίσματα, με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τα διατάξουμε;

β) Εάν θέλουμε τα άτομα Α και Β να τα τοποθετήσουμε στα τρία καθίσματα, με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τα διατάξουμε;

γ) Εάν επιλέξουμε τυχαία δυο από αυτά τα άτομα για την ανάθεση μιας εργασίας, πόσους συνδυασμούς θα έχουμε;

Λύση:

α) Στο ερώτημα αυτό μας ενδιαφέρει η διάταξη των ατόμων (π.χ. το Α στην πρώτη θέση το Β στη δεύτερη κ.ο.κ). Επιχειρώντας, λοιπόν, να τοποθετήσουμε αυτά τα 3 άτομα στις θέσεις αυτές θα δούμε ότι για την πρώτη θέση έχουμε 3 επιλογές. Για την δεύτερη 2 επιλογές. Και για την τρίτη μας απομένει μια επιλογή. Επομένως, οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να διατάξουμε τα 3 άτομα είναι:

$$3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$$

Πράγματι, όλες οι πιθανές διατάξεις των ατόμων θα είναι: $\{ΑΒΓ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ, ΓΒΑ\}$.

Μπορείτε να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα με τη χρήση δενδροδιαγράμματος.

β) Εδώ μας ενδιαφέρει η διάταξη αλλά με λιγότερα άτομα από ότι οι θέσεις. Άρα, εφαρμόζοντας τον τύπο των μεταθέσεων θα έχουμε (με n=3- αριθμός θέσεων και k=2-αριθμός ατόμων):

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6$$

Πράγματι, οι διαφορετικές διατάξεις θα είναι: {AB_,BA_,_AB,_BA,A_B,B_A}, όπου το σύμβολο "_" αναπαριστά την κενή θέση.

γ) Στο ερώτημα αυτό δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη των ατόμων, αλλά οι επιλογές που μπορούμε να έχουμε (οι δυνατοί συνδυασμοί). Εφόσον διαλέγουμε από τα τρία αυτά άτομα (n) τα δύο (k) θα έχουμε:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2} = 3$$

Πράγματι, όλοι οι συνδυασμοί θα είναι: {AB, AΓ, ΓB}.

Άσκηση 2: 8 αυτοκίνητα σταθμεύουν σε 10 θέσεις στάθμευσης. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό, εάν δεν μας ενδιαφέρει η θέση που θα καταλάβει το κάθε αυτοκίνητο;

Λύση:

Πρόκειται για πρόβλημα συνδυασμών (εφόσων δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη των αυτοκινήτων). Επομένως, οι δυνατές θέσεις είναι 10 και τα αυτοκίνητα είναι 8 θα έχουμε:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{10!}{8!(10-8)!} = \frac{3628800}{80640} = 45$$

Άσκηση 3: Το διδακτικό προσωπικό ενός ακαδημαϊκού τμήματος ενός Πανεπιστημίου αποτελείται από 4 επίκουρους καθηγητές, 6 αναπληρωτές καθηγητές και 5 καθηγητές. Επίσης, έχει 30 μεταπτυχιακούς φοιτητές. Πρόκειται να συσταθεί μια πενταμελής επιτροπή με σκοπό να εξετάσει ένα θέμα του προγράμματος σπουδών.

α) Ποιός είναι ο αριθμός όλων των δυνατών επιτροπών οι οποίες θα αποτελούνται μόνο από διδακτικό προσωπικό;

β) Πόσες επιτροπές μπορούν να σχηματιστούν αν πρέπει να συμμετέχουν σε αυτές 2 μεταπτυχιακοί φοιτητές και να αντιπροσωπεύονται όλες οι βαθμίδες;

Λύση:

α) Σε αυτό το υποερώτημα μας ενδιαφέρουν οι συνδυασμοί. Έχουμε 15 μέλη διδακτικού προσωπικού που θα συστήσουν την επιτροπή. Επομένως, εφαρμόζοντας τον τύπο των συνδυασμών με n=15 και k=5 θα έχουμε:

$$\binom{n}{k} = \binom{15}{5} = \frac{15!}{5!(15-5)!} = \frac{15!}{5!10!} = \frac{11\times12\times13\times14\times15}{1\times2\times3\times4\times5} = 3003$$

β) Σε αυτή τη περίπτωση από τους 30 φοιτητές θα πρέπει να επιλεγούν 2. Σύμφωνα με τους συνδυασμούς όλες οι επιλογές θα είναι $\binom{30}{2}$. Θα πρέπει να εκπροσωπούνται όλες οι βαθμίδες. Άρα, για τους βοηθούς καθηγητές οι επιλογές θα είναι $\binom{4}{1}$, για τους αναπληρωτές $\binom{6}{1}$ και για τους καθηγητές $\binom{5}{1}$. Άρα, όλες οι πιθανές επιτροπές θα είναι το γινόμενο των παραπάνω συνδυασμών:

$$\binom{30}{2}\times\binom{4}{1}\times\binom{6}{1}\times\binom{5}{1}=\frac{30!}{2!28!}\times\frac{4!}{1!3!}\times\frac{6!}{1!5!}\times\frac{5!}{1!4!}=\frac{29\times 30}{2}\times 4\times 6\times 5=435\times 120=52200$$

4. Δεσμευμένη, Ολική Πιθανότητα και το Θεώρημα Bayes

Άσκηση 1: Ρίχνουμε τρία κέρματα, μία φορά το καθένα. Θεωρούμε τα γεγονότα Α= "θα έρθει ακριβώς δυο φορές Κορώνα" και Β= "τα κέρματα 1 και 2 θα έρθουν Κορώνα". Να υπολογιστεί η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός Β δεδομένου ότι έχει συμβεί το γεγονός Α.

Λύση:

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος «ρίψη 3 κερμάτων» θα αποτελείται από: 2×2×2=8 δειγματοσημεία. Αυτά θα είναι: S={ΚΚΚ,ΚΚΓ,ΚΓΚ,ΚΓΓ,ΓΚΚ,ΓΚΓ,ΓΓΚ,ΓΓΓ} (Επαληθεύστε το με τη χρήση δενδροδιαγράμματος). Τα δειγματοσημεία είναι όλα ισοπίθανα.

Το γεγονός Α θα αποτελείται από τα εξής δειγματοσημεία: Α={ΚΚΓ,ΚΓΚ,ΓΚΚ}. Ενώ το γεγονός Β θα έχει: Β={ΚΚΚ,ΚΚΓ}. Επομένως, οι πιθανότητες P(A) και P(B) θα είναι:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(S)}=\frac{3}{8}\quad \kappa\alpha\iota\quad P(B)=\frac{N(B)}{N(S)}=\frac{2}{8}$$

Η τομή των γεγονότων Α και Β θα περιέχει τα δειγματοσημεία: Α∩Β={ΚΚΓ}. Και η πιθανότητα της θα είναι προφανώς: $P(A\cap B)=1/8$.

Αναζητούμε την πιθανότητα να συμβεί το γεγονός Β δεδομένου ότι έχει συμβεί το γεγονός Α. Την δεσμευμένη πιθανότητα, δηλαδή, P(B|A). Εφαρμόζοντας την σχέση της δεσμευμένης πιθανότητας θα έχουμε:

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/8}{3/8}=\frac{1}{3}$$

Άσκηση 2: Ρίχνουμε δύο ζάρια από μία φορά. Θεωρούμε τα γεγονότα Α= "το άθροισμα των ενδείξεων τους είναι ≤ 5" και Β= "το άθροισμα των ενδείξεων τους είναι ≥ 4". Να υπολογιστεί η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός Β δεδομένου ότι έχει συμβεί το γεγονός Α.

Λύση:

Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων της ρίψης των δύο ζαριών θα είναι 6×6=36. Μπορούμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα των αθροισμάτων των ενδείξεων όπως παρακάτω

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Το γεγονός Α θα περιέχει τα δειγματοσημεία:

Α={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)}, 10 δειγματοσημεία.

Το γεγονός Β θα έχει 33 δειγματοσημεία (δεν τα παραθέτουμε για ευνόητους λόγους).

Η τομή των γεγονότων Α και Β θα έχει τα εξής δειγματοσημεία:

Α∩Β={(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)}, 7 δειγματοσημεία.

Επομένως, οι αντίστοιχες πιθανότητες θα είναι:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(S)}=\frac{10}{36} \quad \kappa\alpha\iota \quad P(B)=\frac{N(B)}{N(S)}=\frac{33}{36} \quad \kappa\alpha\iota \quad P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(S)}=\frac{7}{36}$$

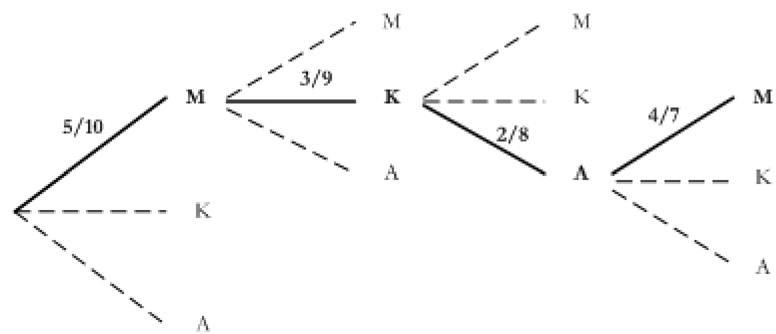
Η δεσμευμένη πιθανότητα που ζητάμε θα είναι:

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{7/36}{10/36}=\frac{7}{10}=0.7$$

Άσκηση 3: Ένα δοχείο περιέχει 10 πανομοιότυπα σφαιρίδια, από τα οποία τα 5 είναι μαύρα, τα 3 είναι κόκκινα και τα 2 είναι άσπρα. Βγάζουμε τέσσερα σφαιρίδια (ένα κάθε φορά) χωρίς να τα επανατοποθετούμε στο δοχείο. Να βρεθεί η πιθανότητα το πρώτο σφαιρίδιο να είναι μαύρο, το δεύτερο κόκκινο, το τρίτο άσπρο και το τέταρτο μαύρο.

Λύση:

Το πείραμα αποτελείται από τέσσερα στάδια. Μπορούμε να κάνουμε χρήση του ακόλουθου δενδροδιαγράμματος:



Στο δενδροδιάγραμμα φαίνεται μόνο η διαδρομή που μας ενδιαφέρει: Μ→Κ→Α→Μ, καθώς επίσης και η εκάστοτε πιθανότητα για την μετάβαση σε κάθε στάδιο. Έτσι θα έχουμε:

$$P(M)=\frac{5}{10} \quad P(K\,|\,M)=\frac{3}{9} \quad P(A\,|\,M\cap K)=\frac{2}{8} \quad P(M\,|\,M\cap K\cap A)=\frac{4}{7}$$

Εμείς αναζητούμε την πιθανότητα P(Μ∩Κ∩Α∩Μ). Σύμφωνα, λοιπόν, με το πολλαπλασιαστικό θεώρημα θα έχουμε:

$$P(M\cap K\cap A\cap M)=P(M)\times P(K\,|\,M)\times P(A\,|\,M\cap K)\times P(M\,|\,M\cap K\cap A)=\frac{5}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{1}{42}$$
$$\approx 0.024$$

Άσκηση 4: Υποθέτουμε οτι έχουμε δύο δίδυμα αδέρφια και ότι η πιθανότητα και τα δύο παιδιά να είναι αγόρια είναι 0.30. Η πιθανότητα και τα δύο παιδιά να είναι κορίτσια είναι 0.26. Αν η πιθανότητα ότι το πρώτο παιδί είναι αγόρι είναι 0.52, να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

α) Το δεύτερο παιδί είναι αγόρι, δεδομένου ότι το πρώτο παιδί είναι αγόρι.

β) Το δεύτερο παιδί είναι κορίτσι, δεδομένου ότι το πρώτο παιδί είναι κορίτσι.

γ) Το πρώτο παιδί είναι αγόρι και το δεύτερο κορίτσι.

Υπόδειξη: Συμβολίστε με A_i και K_i τα γεγονότα το i-παιδί να είναι αγόρι ή κορίτσι, αντίστοιχα, με i=1,2.

Λύση:

Από την εκφώνηση της άσκησης έχουμε τα εξής δεδομένα:

$$P(A_1 \cap A_2) = 0.30 \quad P(K_1 \cap K_2) = 0.26 \quad P(A_1) = 0.52$$

α) Σε αυτό το ερώτημα αναζητούμε την $P(A_2 \mid A_1)$. Εφαρμόζοντας την σχέση της δεσμευμένης πιθανότητας, εύκολα καταλήγουμε:

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{0.30}{0.52} \approx 0.577$$

β) Η πιθανότητα προς εύρεση είναι η $P(K_2 \mid K_1)$. Θα πρέπει, όμως να γνωρίζουμε την πιθανότητα το πρώτο παιδί να είναι κορίτσι:

$$P(K_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0.52 = 0.48$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα:

$$P(K_2 \mid K_1) = \frac{P(K_1 \cap K_2)}{P(K_1)} = \frac{0.26}{0.48} \approx 0.542$$

γ) Τώρα μας ζητείται η πιθανότητα $P(A_1 \cap K_2)$. Σύμφωνα με το πολλαπλασιαστικό θεώρημα αυτή δίνεται από την σχέση:

$$P(A_1 \cap K_2) = P(K_2 \mid A_1) \times P(A_1)$$

Είναι προφανές ότι (επιβεβαιώστε το με τη βοήθεια δενδροδιαγράμματος):

$$P(K_2 \mid A_1) = 1 - P(A_2 \mid A_1) = 1 - 0.577 = 0.423$$

Επομένως:

$$P(A_1 \cap K_2) = 0.423 \times 0.52 \approx 0.22$$

Άσκηση 5: Εάν $A \cap B = \varnothing$ και $P(A \cup B) > 0$, να εκφραστούν οι πιθανότητες $P(A \mid A \cup B)$ και $P(B \mid A \cup B)$ με τη βοήθεια των πιθανοτήτων $P(A)$ και $P(B)$.

Λύση:

Χρησιμοποιούμε την σχέση της υπό συνθήκης πιθανότητας όπως παρακάτω:

$$P(A \mid A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P((A \cap A) \cup (A \cap B))}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}$$

Αντίστοιχα:

$$P(B \mid A \cup B) = \frac{P(B \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P((B \cap A) \cup (B \cap B))}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} = \frac{P(B)}{P(A) + P(B)}$$

Άσκηση 6: Να δειχθεί ότι για τρία γεγονότα A, B και C με P(A) P(B) P(C) > 0 ισχύει:

$$P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P((A \cap B) \mid C)$$

Λύση:

Ξεκινούμε από το αριστερό μέλος της σχέσης και αναπτύσσουμε ως εξής:

$$P(A \cup B \mid C) = \frac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)} = \frac{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}{P(C)}$$

Κατόπιν εφαρμόζουμε τον προσθετικό κανόνα στον αριθμητή:

$$\frac{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}{P(C)} = \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P((A \cap C) \cap (B \cap C))}{P(C)} =$$

$$\frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)} - \frac{P((A \cap B) \cap C)}{P(C)} = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(A \cap B \mid C)$$

Άσκηση 7: Να δειχθεί ότι για δύο γεγονότα A και B με P(A) P(B) > 0 ισχύει:

$$P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B)$$

Λύση:

Ξεκινούμε από το αριστερό μέλος της σχέσης και αναπτύσσουμε όπως παρακάτω:

$$\frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να κάνουμε χρήση ενός διαγράμματος Venn (αφήνεται στον αναγνώστη να το επιβεβαιώσει). Το συμπλήρωμα του γεγονότος A θα είναι όλος ο χώρος γύρω από το γεγονός A και η τομή του με το γεγονός B θα είναι το γεγονός B εκτός από την τομή του με το A. Άρα:

$$\frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A \mid B)$$

Άσκηση 8: Ένα σήμα αποστέλλεται από ένα σημείο A σε ένα σημείο B διαμέσου δύο διακοπτών I και II οι οποίοι βρίσκονται συνδεδεμένοι σε σειρά. Υποθέτουμε ότι οι διακόπτες I και II είναι κλειστοί με πιθανότητες $P(I_K)=0.8$ και $P(II_K)=0.6$, αντίστοιχα. Έστω επίσης ότι ισχύει: $P(II_K \mid I_K)=P(II_K)$. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

i) Το σήμα παραλαμβάνεται στο σημείο B.

ii) Η δεσμευμένη πιθανότητα να είναι ανοικτός ο διακόπτης I, δεδομένου ότι το σήμα δεν παρελήφθη στο σημείο B.

iii) Η δεσμευμένη πιθανότητα να είναι ανοικτός ο διακόπτης II, δεδομένου ότι το σήμα δεν παρελήφθη στο σημείο B.

Λύση:

i) Για να παραληφθεί το σήμα στο σημείο B θα πρέπει και οι δύο διακόπτες να είναι κλειστοί. Ζητούμε δηλαδή την πιθανότητα $P(I_K \cap II_K)$:

$$P(I_K \cap II_K) = P(II_K \mid I_K)\cdot P(I_K) = 0.6\cdot 0.8 = 0.48$$

ii) Για να μην παραληφθεί το σήμα στο σημείο B θα πρέπει είτε ο διακόπτης I είτε ο II να είναι ανοικτός. Ζητούμε δηλαδή την πιθανότητα $P(I_A \mid (I_A \cup II_A)$:

$$P(I_A \mid (I_A \cup II_A)) = \frac{P(I_A \cap (I_A \cup II_A))}{P(I_A \cup II_A)} = \frac{P(I_A)}{P(I_A \cup II_A)}$$

(η ισότητα στον αριθμητή επαληθεύεται αμέσως με τη βοήθεια διαγράμματος Venn).

Το μόνο που απομένει σε αυτό το σημείο είναι ο προσδιορισμός της τιμής του παρονομαστή. Το γεγονός ένας διακόπτης να είναι ανοικτός, είναι το συμπλήρωμα του γεγονότος αυτός να είναι κλειστός. Κάνοντας χρήση και του κανόνα του DeMorgan μπορούμε να έχουμε:

$$P(I_A \cup II_A) = P(\overline{I_K} \cup \overline{II_K}) = P(\overline{I_K \cap II_K}) = 1 - P(I_K \cap II_K) = 0.52$$

Εύκολα λοιπόν υπολογίζουμε:

$$P(I_A \mid (I_A \cup II_A)) = \frac{P(I_A)}{P(I_A \cup II_A)} = \frac{0.2}{0.52} \approx 0.384$$

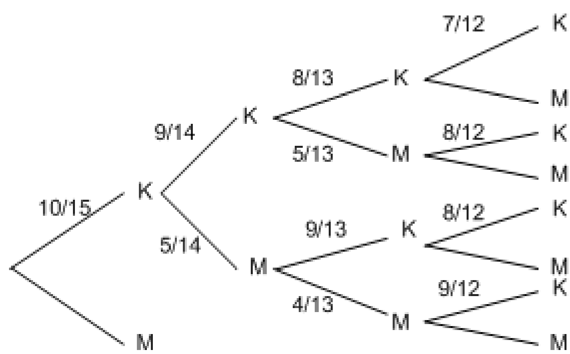
iii) Το ερώτημα αυτό απαιτεί την ίδια διαδικασία, μόνο που ζητείται η πιθανότητα $P(II_A \mid (I_A \cup II_A)$. Αναλόγως, αυτή η πιθανότητα θα είναι:

$$P(II_A \mid (I_A \cup II_A)) = \frac{P(II_A)}{P(I_A \cup II_A)} = \frac{0.4}{0.52} \approx 0.769$$

Άσκηση 9: Ένα κουτί περιέχει 15 πανομοιότυπα σφαιρίδια, τα 10 εκ των οποίων είναι κόκκινα και 5 είναι μαύρα. Βγάζουμε διαδοχικά τέσσερα σφαιρίδια χωρίς επανατοποθέτηση. Υπολογίστε την πιθανότητα το πρώτο και το τέταρτο σφαιρίδιο να είναι κόκκινα.

Λύση:

Από την εκφώνηση μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι το πείραμα μας αποτελείται από τέσσερα στάδια. Είναι, επομένως, χρήσιμο να κατασκευάσουμε ένα δεδνροδιάγραμμα:



Στο δενδροδιάγραμμα μας ενδιαφέρουν μόνο οι διαδρομές που στο πρώτο και στο τέταρτο στάδιο καταλήγουν σε Κ. Σε κάθε στάδιο φαίνεται και η πιθανότητα επιλογής σφαιριδίου.

Ζητούμε, λοιπόν, την πιθανότητα $P(K \cap X \cap X \cap K)$, όπου X είναι το χρώμα των σφαιριδίων στα στάδια 2 και 3 (τα οποία μπορεί να είναι είτε Κ είτε Μ). Σύμφωνα με το θεώρημα της ολικής πιθανότητας θα έχουμε:

$$P(K \cap X \cap X \cap K) = P(K \cap K \cap K \cap K) + P(K \cap K \cap M \cap K) + P(K \cap M \cap K \cap K) + P(K \cap M \cap M \cap K)$$

Και για κάθε μια πιθανότητα εφαρμόζουμε το πολλαπλασιαστικό θεώρημα:

$$P(K \cap K \cap K \cap K) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} = \frac{5040}{32760}$$

$$P(K \cap K \cap M \cap K) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{8}{12} = \frac{3600}{32760}$$

$$P(K \cap M \cap K \cap K) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{9}{13} \cdot \frac{8}{12} = \frac{3600}{32760}$$

$$P(K \cap M \cap M \cap K) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{9}{12} = \frac{1800}{32760}$$

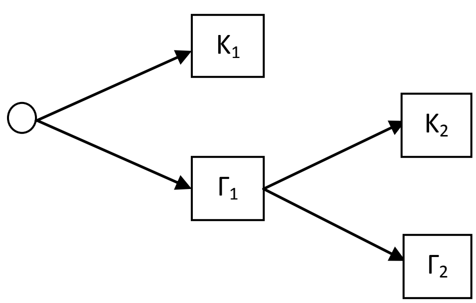
Τέλος, η πιθανότητα προς αναζήτηση θα είναι:

$$P(K \cap X \cap X \cap K) = \frac{5040}{32760} + \frac{3600}{32760} + \frac{3600}{32760} + \frac{1800}{32760} \approx 0.428$$

Άσκηση 10: Δύο φίλοι (Χ και Υ) παίζουν ένα παιχνίδι με ένα τίμιο κέρμα. Ρίχνουν το κέρμα μια φορά, εξετάζουν το αποτέλεσμα και κατόπιν μια δεύτερη. Εάν έρθει Κεφαλή σε οποιαδήποτε από τις δύο ρίψεις, τότε κερδίζει ο Χ, ειδάλλως το παιχνίδι το κερδίζει ο Υ. Να βρεθεί η πιθανότητα να κερδίσει ο Χ την παρτίδα.

Λύση:

Πρόκειται για την άσκηση που χρησιμοποιήθηκε για την ανάδειξη της σημασίας εύρεσης του σωστού δειγματοχώρου. Ο σωστός δειγματοχώρος πράγματι αποτελείται από τα δειγματοσημεία {Κ,ΓΚ,ΓΓ} τα οποία όμως δεν είναι ισοπίθανα. Αυτό μπορεί εύκολα να προκύψει από την χρήση ενός δενδροδιαγράμματος:



Το παιχνίδι εκκινεί με την πρώτη ρίψη του νομίσματος. Επομένως, έχουμε δύο ισοπίθανα ενδεχόμενα K_1 και Γ_1, με $P(K_1)=0.5$ και $P(\Gamma_1)=0.5$. Εάν έρθει Κεφαλή, τότε το παιχνίδι σταματά και κερδίζει ο Χ. Γι αυτό το λόγο δεν συνεχίζεται το δενδροδιάγραμμα έπειτα από το ενδεχόμενο K_1. Εάν έρθει Γράμματα τότε το παιχνίδι συνεχίζεται με την δεύτερη ρίψη. Τότε θα έχουμε τα ενδεχόμενα να έρθει Κ (αφού έχει έρθει Γ στην πρώτη ρίψη) και Γ (αφού έχει έρθει Γ στην πρώτη ρίψη). Επομένως, θα έχουμε τις υπό συνθήκη πιθανότητες $P(K_2|\Gamma_1)=0.5$ και $P(\Gamma_2|\Gamma_1)=0.5$. Από τους τύπους της δεσμευμένης πιθανότητας θα έχουμε:

$$P(K_2 \mid \Gamma_1) = \frac{P(K_2 \cap \Gamma_1)}{P(\Gamma_1)} \Rightarrow P(K_2 \cap \Gamma_1) = 0.5 \times 0.5 = 0.25$$

Αντίστοιχα θα ισχύει και $P(\Gamma_2 \cap \Gamma_1) = 0.5 \times 0.5 = 0.25$. Επομένως, η πιθανότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων Κ, ΓΚ και ΓΓ θα είναι 0.5, 0.25 και 0.25 αντίστοιχα.

Για να βρούμε την πιθανότητα ο X να κερδίσει το παιχνίδι αρκεί να βρούμε την πιθανότητα να έρθει K είτε στην πρώτη είτε στην δεύτερη ρίψη. Εφαρμόζοντας τον τύπο της ολικής πιθανότητας θα έχουμε:

$$P(K) = P(K_1) + P(K_2 \mid \Gamma_1) = 0.5 + 0.25 = 0.75$$

Άσκηση 11: Σε ένα συγκεκριμένο σταθμό πώλησης καυσίμων, τα ποσοστά των οδηγών που χρησιμοποιούν αμόλυβδη, ενισχυμένη αμόλυβδη και υψηλής ποιότητας αμόλυβδη βενζίνη είναι 40%, 35% και 25%, αντίστοιχα. Τα αντίστοιχα ποσοστά με τα οποία οι οδηγοί επιλέγουν να γεμίσουν πλήρως τις δεξαμενές τους είναι 30%, 50% και 60%. Ποια είναι η πιθανότητα ένας οδηγός αυτοκινήτου που θα επιλεγεί τυχαία από τους ιδιοκτήτες του πρατηρίου, να γεμίσει πλήρως τη δεξαμενή καυσίμου του;

Λύση:

Ας συμβολίσουμε με Α, Ε και Υ τα γεγονότα ένας οδηγός να βάλει Αμόλυβδη, Ενισχυμένη αμόλυβδη και Υψηλής ποιότητας αμόλυβδη βενζίνη, αντίστοιχα. Επίσης, ας συμβολίσουμε με Φ το γεγονός ένας οδηγός να γεμίσει πλήρως το ρεζερβουάρ του. Από τα δεδομένα της άσκησης θα έχουμε: $P(A)=0.4$, $P(E)=0.35$, $P(Y)=0.25$, $P(\Phi|A)=0.3$, $P(\Phi|E)=0.5$ και $P(\Phi|Y)=0.6$.

Αναζητούμε την πιθανότητα $P(\Phi)$ η οποία μπορεί να γραφτεί σύμφωνα με τον τύπο της ολικής πιθανότητας:

$$P(\Phi) = P(\Phi \cap A) + P(\Phi \cap E) + P(\Phi \cap Y)$$

Εύκολα μπορούν να προσδιοριστούν οι επιμέρους πιθανότητες από τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας:

$$P(\Phi \cap A) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$$

$$P(\Phi \cap E) = 0.5 \times 0.35 = 0.175$$

$$P(\Phi \cap Y) = 0.6 \times 0.25 = 0.15$$

Άρα

$$P(\Phi) = 0.445$$

Άσκηση 12: Από ένα πληθυσμό που αποτελείται από 52% γυναίκες και 48% άνδρες, επιλέγεται στην τύχη ένα άτομο, το οποίο βρίσκεται ότι πάσχει από διαβήτη. Αν υποθέσουμε ότι οι αναλογίες των πασχόντων από διαβήτη στις γυναίκες και τους άνδρες είναι 25% και 5%, αντίστοιχα, ποια είναι η πιθανότητα το άτομο που επιλέχθηκε να είναι άνδρας;

Λύση:

Ας συμβολίσουμε με M, W και A τα γεγονότα ένα άτομο να είναι άνδρας, γυναίκα και να πάσχει από διαβήτη, αντίστοιχα. Οι πιθανότητες που μας δίνονται από την εκφώνηση είναι:

$$P(M) = 0.48\,, P(W) = 0.52\,, P(A\,|\,M) = 0.05\,, P(A|W) = 0.25$$

Εμείς ψάχνουμε την πιθανότητα $P(M \mid A)$. Αυτή θα δίνεται:

$$P(M \mid A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)}$$

Ας ξεκινήσουμε προσδιορίζοντας την πιθανότητα ένα άτομο να έχει διαβήτη $P(A)$. Από τα δεδομένα της άσκησης θα έχουμε:

$$P(A\cap M) = P(A\,|\,M)\cdot P(M) = 0.05\cdot 0.48 = 0.024$$

$$P(A\cap W) = P(A|W)\cdot P(W) = 0.25\cdot 0.52 = 0.13$$

Με χρήση της ολικής πιθανότητας προσδιορίζουμε την $P(A)$:

$$P(A) = P(A\cap M) + P(A\cap W) = 0.024\cdot 0.13 = 0.154$$

Με απλή αντικατάσταση, καταλήγουμε:

$$P(M \mid A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{0.024}{0.154} \approx 0.156$$

Άσκηση 13: Τρείς μηχανές I, II και III, συναρμολογούν το 30%, 30% και 40%, αντίστοιχα, του συνόλου των τηλεοράσεων μιας εταιρίας. Από αυτές το 4%, το 3% και το 2%, αντίστοιχα είναι ελαττωματικά. Επιλέγουμε τυχαία μια τηλεόραση από το σύνολο και ελέγχουμε εάν είναι ελαττωματική ή όχι.

i) Ποια η πιθανότητα η τηλεόραση αυτή να είναι ελαττωματική;

ii) Εάν όντως είναι ελαττωματική, ποια η πιθανότητα να έχει κατασκευαστεί από την μηχανή I;

iii) Η ίδια ερώτηση με το υποερώτημα (ii), αυτή τη φορά για τις μηχανές II και III.

Λύση:

i) Η εκφώνηση μας δίνει τις εξής πιθανότητες: P(I)=0.3, P(II)=0.3 και P(III)=0.4. Επίσης μας δίνει τις δεσμευμένες πιθανότητες μια τηλεόραση να είναι ελαττωματική (γεγονός E) δεδομένου ότι έχει προέλθει από μία από τις μηχανές I, II και III: P(E|I)=0.04, P(E|II)=0.03 και P(E|III)=0.02.

Η πιθανότητα μια τυχαία τηλεόραση να είναι ελαττωματική P(E) θα προκύψει εφαρμόζοντας το θεώρημα της ολικής πιθανότητας:

$$P(E) = P(E \cap I) + P(E \cap II) + P(E \cap III) = 0.04 \cdot 0.3 + 0.03 \cdot 0.3 + 0.02 \cdot 0.4 = 0.029$$

ii) Ζητούμε την πιθανότητα P(I|E):

$$P(I \mid E) = \frac{P(I \cap E)}{P(E)} = \frac{0.012}{0.029} \approx 0.413$$

iii) Αναλόγως καταλήγουμε ότι P(II|E)=0.31 και P(III|E)=0.276.

5. Ανεξαρτησία Γεγονότων

Άσκηση 1: Ένα ποντίκι είναι εγκλωβισμένο σε ένα λαβύρινθο και πρέπει να περάσει από τρείς διαδοχικές παγίδες για να μπορέσει να απελευθερωθεί. Οι παγίδες λειτουργούν ανεξάρτητα και οι πιθανότητες να περάσει το ποντίκι επιτυχώς από αυτές είναι 0.6, 0.4 και 0.2, αντίστοιχα. Να υπολογιστούν οι ακόλουθες πιθανότητες:

i) Το ποντίκι θα καταφέρει να βγει από τον λαβύρινθο.

ii) Το ποντίκι δεν θα τα καταφέρει.

Λύση:

i) Ας συμβολίσουμε με K_1, K_2 και K_3 τα γεγονότα ότι το ποντίκι θα καταφέρει να περάσει από τις παγίδες 1, 2 και 3, αντίστοιχα. Θα έχουμε δηλαδή $P(K_1)=0.6$, $P(K_2)=0.4$ και $P(K_3)=0.2$. Για να μπορέσει το ποντίκι να απελευθερωθεί θα πρέπει να περάσει επιτυχώς (E) από όλες τις παγίδες. Άρα:

$$P(E) = P(K_1 \cap K_2 \cap K_3) = P(K_1) \cdot P(K_2) \cdot P(K_3) = 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.2 = 0.048$$

ii) Εύκολα βρίσκουμε ότι:

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - 0.048 = 0.952$$

Άσκηση 2: Ηλεκτρικό ρεύμα μεταδίδεται από ένα σημείο A σε ένα σημείο B διαμέσου N διακοπτών που είναι συνδεδεμένοι παράλληλα. Υποθέτουμε ότι οι N διακόπτες κλείνουν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο και με αντίστοιχες πιθανότητες p_1, p_2, …, p_N. Να υπολογιστούν οι ακόλουθες πιθανότητες:

i) Κανένας διακόπτης δεν είναι κλειστός.

ii) Τουλάχιστον ένας διακόπτης είναι κλειστός.

iii) Ακριβώς ένας διακόπτης είναι κλειστός.

iv) Πώς θα γίνουν οι εκφράσεις εάν $p_1=p_2=\ldots=p_N$

Λύση:

i) Σε αυτό το ερώτημα αναζητούμε την πιθανότητα όλοι οι διακόπτες να είναι ανοικτοί. Ας συμβολίσουμε τον κάθε διακόπτη με έναν αύξον αριθμό (1, 2, …, Ν). Και το γεγονός ότι αυτός είναι ανοικτός με το γράμμα Α. Έτσι εύκολα μπορούμε να γράψουμε την πιθανότητα που αναζητούμε

$$P(1_A \cap 2_A \cap \ldots \cap N_A) = P(1_A)\cdot P(2_A)\cdots P(N_A) = (1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdots(1-p_N)$$

ii) Τώρα ζητούμε την πιθανότητα τουλάχιστον ένας διακόπτης να είναι κλειστός:

$$P(\overline{1_A} \cup \overline{2_A} \cup \ldots \cup \overline{N_A}) = P(\overline{1_A \cap 2_A \cap \ldots \cap N_A}) = 1-(1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdots(1-p_N)$$

iii) Ζητείται η πιθανότητα:

$$P((\overline{1_A} \cap 2_A \cap \ldots \cap N_A) \cup (1_A \cap \overline{2_A} \cap \ldots \cap N_A) \cup \ldots \cup (1_A \cap 2_A \cap \ldots \cap \overline{N_A})$$

Τα σύνθετα γεγονότα μέσα στις παρενθέσεις είναι αμοιβαία αποκλειόμενα (δεν μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα) μεταξύ τους. Εφαρμόζοντας, λοιπόν, τον προσθετικό κανόνα στην απλουστευμένη του μορφή (λόγω των αμοιβαίων αποκλειόμενων γεγονότων) καταλήγουμε:

$$p_1(1-p_2)\cdots(1-p_N) + (1-p_1)p_2\cdots(1-p_N) + \ldots + (1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_{N-1})p_N$$

iv) Με απλή αντικατάσταση θα έχουμε για το ερώτημα (i) $(1\text{-}p)^N$, για το (ii) $1\text{-}(1\text{-}p)^N$ και το (iii) $Np(1\text{-}p)^{N-1}$.

Άσκηση 3: Αν τα γεγονότα Α, Β και C είναι ανεξάρτητα, να δείξετε ότι:

i) Τα γεγονότα Α και B∪C είναι επίσης ανεξάρτητα.

ii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα P((B∪C)|A) σε συνάρτηση των πιθανοτήτων P(B) και P(C).

Λύση:

i) Για να είναι τα γεγονότα Α και B∪C ανεξάρτητα θα πρέπει να ισχύει P(A|B∪C)=P(A) και P(B∪C|A)=P(B∪C).

Αναπτύσσουμε ως εξής:

$$
\begin{aligned}
&P(A|B\cup C)=\frac{P(A\cap(B\cup C))}{P(B\cup C)}=\frac{P((A\cap B)\cup(A\cap C))}{P(B\cup C)}=\\
&\frac{P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)}{P(B\cup C)}=\frac{P(A)P(B)+P(A)P(C)-P(A)P(B)P(C)}{P(B\cup C)}=\\
&\frac{P(A)\left[P(B)+P(C)-P(B)P(C)\right]}{P(B\cup C)}=\frac{P(A)P(B\cup C)}{P(B\cup C)}=P(A)
\end{aligned}
$$

Με αντίστοιχο τρόπο καταλήγουμε και στο P(B∪C|A)=P(B∪C).

ii) Αναπτύσσουμε ως εξής:

$$
\begin{aligned}
&P(B\cup C\,|\,A)=\frac{P((B\cup C)\cap P(A))}{P(A)}=\frac{P(B\cup C)P(A)}{P(A)}=P(B\cup C)=\\
&P(B)+P(C)-P(B\cap C)=P(B)+P(C)-P(B)P(C)
\end{aligned}
$$

Φυσικά υπάρχει και απλούστερος τρόπος για να καταλήξουμε στο παραπάνω αποτέλεσμα. Αφού P(B∪C|A)=P(B∪C) θα έχουμε:

$$P(B\cup C\,|\,A)=P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)=P(B)+P(C)-P(B)P(C)$$

6. Τυχαίες Μεταβλητές, Μέση Τιμή και Κατανομές

Άσκηση 1: Ένα περιοδικό δημοσιεύει τις φωτογραφίες τριών ηθοποιών, έστω Α, Β, Γ, και ζητά από τους αναγνώστες να αντιστοιχίσουν σωστά τα ονόματα τους. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή Χ η οποία προσδιορίζει τον αριθμό των σωστών αντιστοιχίσεων. Εάν ένας αναγνώστης που δεν ξέρει καθόλου τους ηθοποιούς προσπαθήσει να αντιστοιχίσει τα ονόματα στις φωτογραφίες, να βρεθούν:

i) Οι τιμές που μπορεί να πάρει η Χ.

ii) Η πιθανότητα να μην υπάρξει καμία σωστή αντιστοίχιση.

iii) Η πιθανότητα όλες οι αντιστοιχίσεις να είναι σωστές.

Λύση:

i) Ας υποθέσουμε ότι η σωστή σειρά αντιστοίχισης είναι Α, Β, Γ. Ο δειγματικός χώρος θα είναι:

{ΑΒΓ,ΑΓΒ,ΒΑΓ,ΒΓΑ,ΓΑΒ,ΓΒΑ}. Τα δειγματοσημεία δίνουν τις εξής τιμές στην Χ, αντίστοιχα: Χ=3,Χ=1,Χ=1,Χ=0,Χ=0,Χ=1. Άρα οι τιμές που παίρνει η τ.μ. Χ είναι 0,1,3.

ii) Ζητείται η πιθανότητα P(X=0). Εύκολα καταλήγουμε ότι:

$$P(X=0)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

iii) Παρόμοια:

$$P(X=3)=\frac{1}{6}$$

Άσκηση 2: Ρίχνουμε δύο τίμια ζάρια ταυτόχρονα. Έστω η τ.μ. Χ στην οποία αναθέτουμε το αποτέλεσμα του αθροίσματος των ενδείξεων των δύο ζαριών.

α) Να βρεθούν οι πιθανότητες P(3≤X≤5) και P(X≥9).

β) Να σχεδιαστεί η συνάρτηση μάζας πιθανότητας f(x)=P(X=x)

Λύση:

α) Κατασκευάζουμε τον πίνακα με όλα τα πιθανά αθροίσματα.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Για την πιθανότητα P(3≤X≤5) θα έχουμε:

$$P(3\leq X\leq 5)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

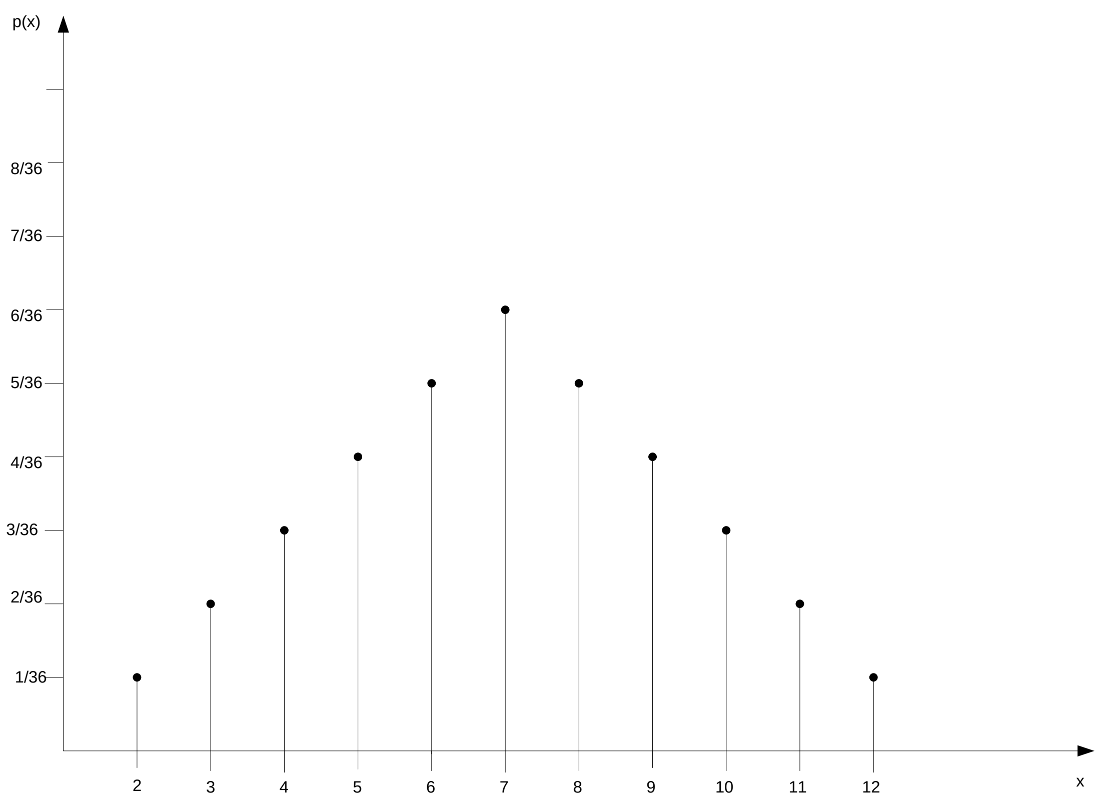
Αντίστοιχα για την P(X≥9):

$$P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) = \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{10}{36}$$

β) Η γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης μάζας πιθανότητας μπορεί να προκύψει εύκολα και με την χρήση του παρακάτω πίνακα:

Τιμή τυχαίας μεταβλητής X	Πιθανότητα p(x)=f(x)
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

Αναπαριστώντας γραφικά τις τιμές του παραπάνω πίνακα θα έχουμε το γράφημα της συνάρτησης μάζας πιθανότητας.



Άσκηση 3: Έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή X η οποία παίρνει τιμές στο διάστημα [1,3] με πυκνότητα:

$$f(x) = \frac{a}{x^2}$$

Να βρεθεί η σταθερά **α**.

Λύση:

Από την εκφώνηση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η X στο R-[1,3] θα είναι μηδέν. Δηλαδή *f(x)*=0 όταν το x ανήκει στο R-[1,3]. Εφόσον η *f(x)* είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα πρέπει να ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{x^2}dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{3} \frac{a}{x^2}dx + \int_{3}^{\infty} 0dx = \int_{1}^{3} \frac{a}{x^2}dx = a\int_{1}^{3} x^{-2}dx = a\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^3 = a\left[-x^{-1}\right]_1^3 = a(-3^{-1}+1^{-1}) =$$
$$a(1-\frac{1}{3}) = a\frac{2}{3}$$

Θα πρέπει:

$\frac{2a}{3} = 1$ άρα $a = \frac{3}{2}$ και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2x^2} & \text{για } 1 \le x \le 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άσκηση 4: Η συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^c & \text{για } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{για } x < 0 \text{ ή } x > 1 \end{cases}$$

Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c (c≠-1).

Λύση:

Για να είναι η f συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα πρέπει να ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Επομένως:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} 2x^c dx + \int_{1}^{\infty} 0dx = \int_{0}^{1} 2x^c dx = 2\left[\frac{x^{c+1}}{c+1}\right]_0^1 = 2(\frac{1^{c+1}}{c+1} - 0) = \frac{2}{c+1}$$

Τέλος θα έχουμε:

$$\frac{2}{c+1} = 1 \Rightarrow c = 1$$

Άρα η f θα ορίζεται όπως ακολούθως:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{για } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{για } x < 0 \text{ ή } x > 1 \end{cases}$$

Άσκηση 5: Ρίχνονται δύο ζάρια. Να βρεθεί η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής που προσδιορίζει το άθροισμα των ενδείξεων τους.

Λύση:

Διαισθητικά μπορεί εύκολα κανείς να υποστηρίξει ότι η μέση τιμή της διακριτής τυχαίας μεταβλητής θα είναι ίση με 7. Πράγματι, κάνοντας χρήση του ορισμού της μέσης τιμής μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής θα καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα:

$$E(X) = \sum_{i=2}^{12} x_i p(x_i) = 2\frac{1}{36} + 3\frac{2}{36} + 4\frac{3}{36} + 5\frac{4}{36} + 6\frac{5}{36} + 7\frac{6}{36} + 8\frac{5}{36} + 9\frac{4}{36} + 10\frac{3}{36} + 11\frac{2}{36} + 12\frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

Άσκηση 6: Μια τυχαία μεταβλητή έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{για } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να βρεθεί η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής.

Λύση:

Η τυχαία μεταβλητή είναι συνεχής στο διάστημα [0,2]. Η μέση τιμή της θα δίνεται:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Αναπτύσσοντας θα έχουμε:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} x\frac{x}{2}dx + \int_{2}^{\infty} 0dx = \int_{0}^{2} \frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}(\frac{2^3}{3} - 0) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Άσκηση 7: Ένα νόμισμα (τίμιο) ρίχνεται διαδοχικά για 5 φορές.

α) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα της πιθανότητας να έρθει κεφαλή k φορές (όπου k=0,1,2,3,4,5).

β) Να βρεθεί η μέση τιμή του αριθμού κεφαλών στο τέλος της διαδικασίας.

Λύση:

α) Πρόκειται για διωνυμική κατανομή. Το πείραμα μας αποτελείται δηλαδή από n(=5) διαδοχικές δοκιμές Bernoulli.

Εάν αναθέσουμε στην τυχαία μεταβλητή Χ (διακριτή) τον αριθμό των κεφαλών που θα προκύψουν έπειτα από τις διαδοχικές ρίψεις του νομίσματος, η πιθανότητα Χ=k (όπου k=0,1,2,3,4,5) θα δίνεται από τη σχέση:

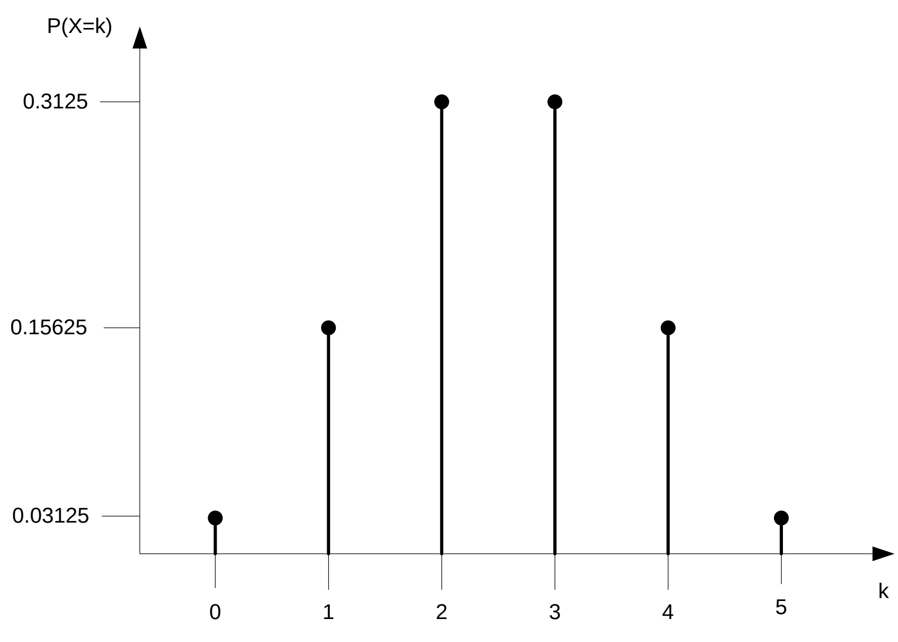
$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Όπου p η πιθανότητα επιτυχίας (η πιθανότητα να έρθει κεφαλή σε κάθε ρίψη του νομίσματος).

Θα έχουμε, λοιπόν:

$$P(X=0)=\binom{5}{0}0.5^0 0.5^5=\frac{5!}{0!5!}0.03125=0.03125$$
$$P(X=1)=\binom{5}{1}0.5^1 0.5^4=\frac{5!}{1!4!}0.5\cdot 0.0625=0.15625$$
$$P(X=2)=\binom{5}{2}0.5^2 0.5^3=\frac{5!}{2!3!}0.25\cdot 0.125=0.3125$$
$$P(X=3)=\binom{5}{3}0.5^3 0.5^2=\frac{5!}{3!2!}0.125\cdot 0.25=0.3125$$
$$P(X=4)=\binom{5}{4}0.5^4 0.5^1=\frac{5!}{4!1!}0.0625\cdot 0.5=0.15625$$
$$P(X=5)=\binom{5}{5}0.5^5 0.5^0=\frac{5!}{5!0!}0.03125=0.03125$$

Το διάγραμμα που θα προκύψει θα είναι:



β) Η μέση τιμή της διακριτής τυχαίας μεταβλητής Χ θα είναι:

$$E(X)=\sum_{k=0}^{5}kp(k)=0\cdot 0.03125+1\cdot 0.15625+2\cdot 0.3125+3\cdot 0.3125+4\cdot 0.15625+5\cdot 0.03125=2.5$$

Άσκηση 8: Ένας καθηγητής επικοινωνεί με τους φοιτητές του μέσω email. Τα μηνύματα φτάνουν στη θυρίδα του καθηγητή με μέσο ρυθμό ένα μήνυμα κάθε έξι ώρες και απαντώνται από αυτόν με μέσο ρυθμό ένα μήνυμα ανά οκτώ ώρες. Με βάση τα στοιχεία αυτά:

i. Να υπολογιστεί η πιθανότητα ο καθηγητής να λάβει τρία τουλάχιστον μηνύματα σε μία μέρα;

ii. Να υπολογιστεί η πιθανότητα ο καθηγητής να απαντήσει σε δύο μηνύματα σε μία ημέρα;

iii. Αν ο μέσος ρυθμός λήψης των μηνυμάτων από τον καθηγητή παραμείνει ο ίδιος αλλά ο μέσος ρυθμός απάντησης αυξηθεί κατά 70%, να υπολογιστεί η πιθανότητα να προλαβαίνει να απαντάει σε 4 τουλάχιστον μηνύματα καθημερινά;

Λύση:

Ας υποθέσουμε αρχικά τις δύο τυχαίες μεταβλητές X_{in}=”ο αριθμός των εισερχομένων μηνυμάτων” και X_{out}=”ο αριθμός των εξερχομένων (απαντημένων) μηνυμάτων”, οι οποίες λαμβάνουν τιμές σύμφωνα με την Poisson κατανομή. Κατόπιν ας υπολογίσουμε τον ρυθμό λ_{in} και λ_{out}.

$$\lambda_{in} = \frac{24}{6} = 4 \mu\eta\nu / \eta\mu\acute{\varepsilon}\rho\alpha \ \text{ και } \ \lambda_{out} = \frac{24}{8} = 3 \mu\eta\nu / \eta\mu\acute{\varepsilon}\rho\alpha$$

i) Σε αυτή την ερώτηση αναζητούμε την $P(X_{in} \geq 3)$. Θα έχουμε:

$$P(X_{in} \geq 3) = 1 - P(X_{in} < 3) = 1 - \left[P(X_{in} = 0) + P(X_{in} = 1) + P(X_{in} = 2)\right]$$

Σύμφωνα με την Poisson κατανομή, η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή να πάρει μια συγκεκριμένη τιμή σε ένα χρονικό διάστημα δίνεται από:

$$P(X = x) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^x}{x!}$$

όπου t=1 ημέρα. Άρα θα έχουμε:

$$P(X_{in} \geq 3) = 1 - P(X_{in} < 3) = 1 - \left[e^{-4} \frac{4^0}{0!} + e^{-4} \frac{4^1}{1!} + e^{-4} \frac{4^2}{2!} \right] = 1 - e^{-4}(1 + 4 + 8) = 1 - e^{-4} \cdot 13 \approx 0.758$$

ii) Τώρα, θέλουμε να προσδιορίσουμε την πιθανότητα $P(X_{out}=2)$. Εύκολα προκύπτει:

$$P(X_{out} = 2) = e^{-\lambda_{out} t} \frac{(\lambda_{out} t)^x}{x!} = e^{-3} \frac{3^2}{2!} = 4.5 \cdot e^{-3} \approx 0.226$$

iii) Σε αυτή την περίπτωση το λ_{out} θα μεγαλώσει κατά 3×0.7=2.1 μην/ημέρα. Άρα συνολικά ο καθηγητής θα απαντά σε 5.1 μην/ημέρα. Ζητούμε, λοιπόν, την πιθανότητα $P(X_{out}\geq 4)$ με το ανανεωμένο λ_{out}. Θα έχουμε:

$$P(X_{out}\geq 4)=1-P(X_{out}\leq 3)=1-[P(X_{in}=0)+P(X_{in}=1)+P(X_{in}=2)+P(X_{in}=3)]=$$
$$1-\left[e^{-5.1}\frac{5.1^0}{0!}+e^{-5.1}\frac{5.1^1}{1!}+e^{-5.1}\frac{5.1^2}{2!}+e^{-5.1}\frac{5.1^3}{3!}\right]=1-e^{-5.1}(1+5.1+13.005+22.1085)\approx 0.744$$

7. Βιβλιογραφία

1. Γ. Ζιούτας, *Πιθανότητες και Στοιχεία Στατιστικής για Μηχανικούς*, Εκδόσεις Ζήτη, 2005.
2. Γ. Ρούσσας, *Εισαγωγή στην Πιθανοθεωρία*, Εκδόσεις Ζήτη, 2011.
3. Α. Παπούλης, *Πιθανότητες, Τυχαίες Μεταβλητές και Στοχαστικές Διαδικασίες*, Εκδόσεις Τζιόλα, 2007.
4. Σ. Κουνιάς και Χ. Μωυσιάδης, *Θεωρία Πιθανοτήτων Ι*, Εκδόσεις Ζήτη, 1995.
5. K. Weltner, J. Grosjean, P. Schuster and W. J. Weber, *Mathematics for Engineers and Scientists*, Stanley Thornes Ltd, 1994.
6. Α. Κουϊρουκίδης, *Πιθανότητες-Στατιστική*, ΤΕΙ Σερρών, 2005.