ΤΕΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε.

Θεωρία της Πληροφορίας

3ο Εξάμηνο

Τομέας Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων

Δρ. Αναστάσιος Πολίτης

Καθηγητής Εφαρμογών

Διεξαγωγή και Εξέταση του Μαθήματος

- **Διεξαγωγή του Μαθήματος**
  - Κάθε πότε?
    - Βλέπε πρόγραμμα εξαμήνου.
  - Πού?
    - ΑΜΦ Τμήματος Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε.
  - Πώς?
    - 13 Διαλέξεις (περιλαμβάνουν και τις Ασκήσεις Πράξης)
- **Εξέταση**
  - Γραπτή στο τέλος του εξαμήνου.
  - Κλειστές σημειώσεις (δίνεται τυπολόγιο).
- **Επικοινωνία και ενημέρωση**
  - Ιστοσελίδα Μαθήματος:

    http://www.teiser.gr/icd/staff/politis/mathimata.htm
  - Επικοινωνία με τον διδάσκοντα

    anpol@teiser.gr (αποστολές μηνυμάτων που είναι ανώνυμα δεν θα απαντώνται)
  - Ώρες γραφείου: βλέπε ιστοσελίδα.

Βιβλιογραφία Μαθήματος

- **Βασική βιβλιογραφία μαθήματος**
  - Εγχειρίδιο Δρ. Ι. Ρένανου «Θεωρία της Πληροφορίας», Οκτώβριος 2003 (βρίσκεται στη σελίδα του μαθήματος και στο εκπαιδευτικό υλικό).
  - Ότι ειπωθεί κατά την διάρκεια των διαλέξεων (παραδείγματα, ασκήσεις κλπ).
  - Οι διαφάνειες του μαθήματος (μόνο ως βοήθημα).
- **Συμπληρωματική βιβλιογραφία**
  - «Εισαγωγή στη θεωρία πληροφορίας», **Αφράτη Φώτω**.

  - «Θεωρία πληροφοριών – Κώδικες», **Βούκαλης Δημήτρης**.

Εισαγωγή

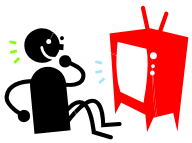
- **20ος Αιώνας**
  - Αιώνας Πληροφορικής και Επικοινωνιών.
  - Ανάπτυξη μέσων
    - καταγραφής
    - αποθήκευσης
    - επεξεργασίας
    - μετάδοσης (επικοινωνία)

  της **πληροφορίας**.
  - Ραγδαία εξέλιξη τεχνολογικών επιτευγμάτων

Τηλέφωνο

Ραδιόφωνο

Τηλεόραση



Δίκτυα Υπολογιστών

Εισαγωγή

- **Τί είναι όμως η Πληροφορία**
  - Γνώση
  - Ενημέρωση
  - Συμβουλή
  - Δεδομένα
- Παράδειγμα Χρηματιστή-Επενδυτή
  - Ο επενδυτής χρειάζεται **πληροφορίες** από τον χρηματιστή (**Συμβουλή**).
  - Ο χρηματιστής τις δίνει βασιζόμενος σε **πληροφορίες** που κατέχει (**Γνώση**).
  - Ο χρηματιστής **πληροφορεί** τον επενδυτή για τις μετοχές μιας εταιρίας (**Ενημέρωση**).
  - Ο επενδυτής αξιολογεί τις **πληροφορίες** για να πουλήσει/αγοράσει (**Δεδομένα**).
- Η πληροφορία είναι **Μέτρο της Αβεβαιότητας** (ή της βεβαιότητας)
  - Ο επενδυτής μειώνει την **αβεβαιότητα** του συμβουλευόμενος τον χρηματιστή.
  - Ο χρηματιστής γνωρίζει τα χρηματηστιριακά θέματα με **βεβαιότητα**.

Εισαγωγή

- Στις αρχές με μέσα του 20ου αιώνα, η **πληροφορία** ήταν:
  - Έννοια αφηρημένη και ποιοτική (τι αξίζει να πληροφορηθώ?)
    - Άρα, δεν μπορώ να βγάλω νόμους που να περιγράφουν με αυστηρότητα την πληροφορία και επικοινωνία (δύσκολος σχεδιασμός υπολογιστικών και επικοινωνιακών συστημάτων).
- Ενδιαφέρον για ποσοτικοποίηση της πληροφορίας
  - Πόση πληροφορία περιέχεται σε ένα γεγονός.
- **1948**
  - Shannon, "A Mathematical Theory of Communication"
  - Θεμελίωσε έννοιες/θεωρήματα για την μαθηματική περιγραφή της επικοινωνίας.
  - Ακριβής ανάλυση με μαθηματική αυστηρότητα της μετάδοσης πληροφοριών.
  - Μπορώ να σχεδιάσω καλύτερα επικοινωνιακά συστήματα (ξέρω πόση πληροφορία χρειάζεται να μεταδωθεί για ένα γεγονός!).

Εισαγωγή

- **Η ΘτΠ** βασίζεται στη
  - πιθανοθεωρία
  - στατιστική
  - άλγεβρα
- Απαντά σε ερωτήματα που αφορούν:
  - περιγραφή διαύλου επικοινωνίας
  - επικοινωνία σε περιβάλλοντα θορύβου
  - συμπίεση δεδομένων
  - κρυπτογράφηση
- Αρχικά:
  - η ΘτΠ αποτέλεσε τμήμα της επιστήμης επικοινωνιών
- Σήμερα:
  - χωριστός κλάδος των μαθηματικών.

Βασικές Έννοιες

- Στη ΘτΠ η έννοια της **πληροφορίας** έχει ποσοτικό χαρακτήρα (≠εννοιολογικού περιεχομένου).
- Η πληροφορία ενός γεγονότος ***A*** σχετίζεται με την πιθανότητα πραγματοποίησης του γεγονότος p_A και μόνον αυτή. Δηλαδή:

$$I(A) = f(p_A)$$

- Στην πράξη
  - μικρότερη p_A, περισσότερη I(A). Δηλαδή:

$$I(A) \propto \frac{1}{p_A}$$

- Συμφωνεί με κοινή αντίληψη?
  - Μερικές φορές ναι, μερικές όχι!
- **Παράδειγμα**
  - σε συμφωνία με την κοινή αντίληψη:
    - Γεγονός Α: «Σήμερα έγινε ολική έκλειψη ηλίου».
    - Γεγονός Β: «Σήμερα ο ήλιος ανέτειλε».

    I(A)>I(B)
  - σε ασυμφωνία με την κοινή αντίληψη:
    - Γεγονός Α: «Στην εκλογική αναμέτρηση μεταξύ των κομμάτων Χ και Υ, κέρδισε το Χ».
    - Γεγονός Β: «Έριξα τα ζάρια και έτυχα 6-5».

    I(B)>I(A)

Μέτρο της Πληροφορίας

• Αν Α είναι ένα τυχαίο γεγονός, και p_A είναι η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός αυτό τότε, το μέτρο της πληροφορίας του Α, I(A) θα πρέπει να έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Το I(A) θα πρέπει να είναι συνάρτηση της p_A.

$$\mathbf{I(A)} = f(p_A)$$

2. Το I(A) θα πρέπει να είναι πραγματική θετική συνάρτηση.
3. Η συνάρτηση I(A) θα πρέπει να είναι γνησίως φθίνουσα:

$$\forall p_A, p_B : p_A > p_B \Rightarrow \mathbf{I(A)} < \mathbf{I(B)}$$

4. Αν Α και Β είναι δύο ανεξάρτητα γεγονότα (δηλαδή $p(A \cap B)=p_A \cdot p_B$) τότε το μέτρο της πληροφορίας εμφάνισης και των δύο γεγονότων θα πρέπει να είναι το άθροισμα των δύο επιμέρους μέτρων πληροφορίας:

$$\mathbf{I(A \cap B) = I(A) + I(B)}$$

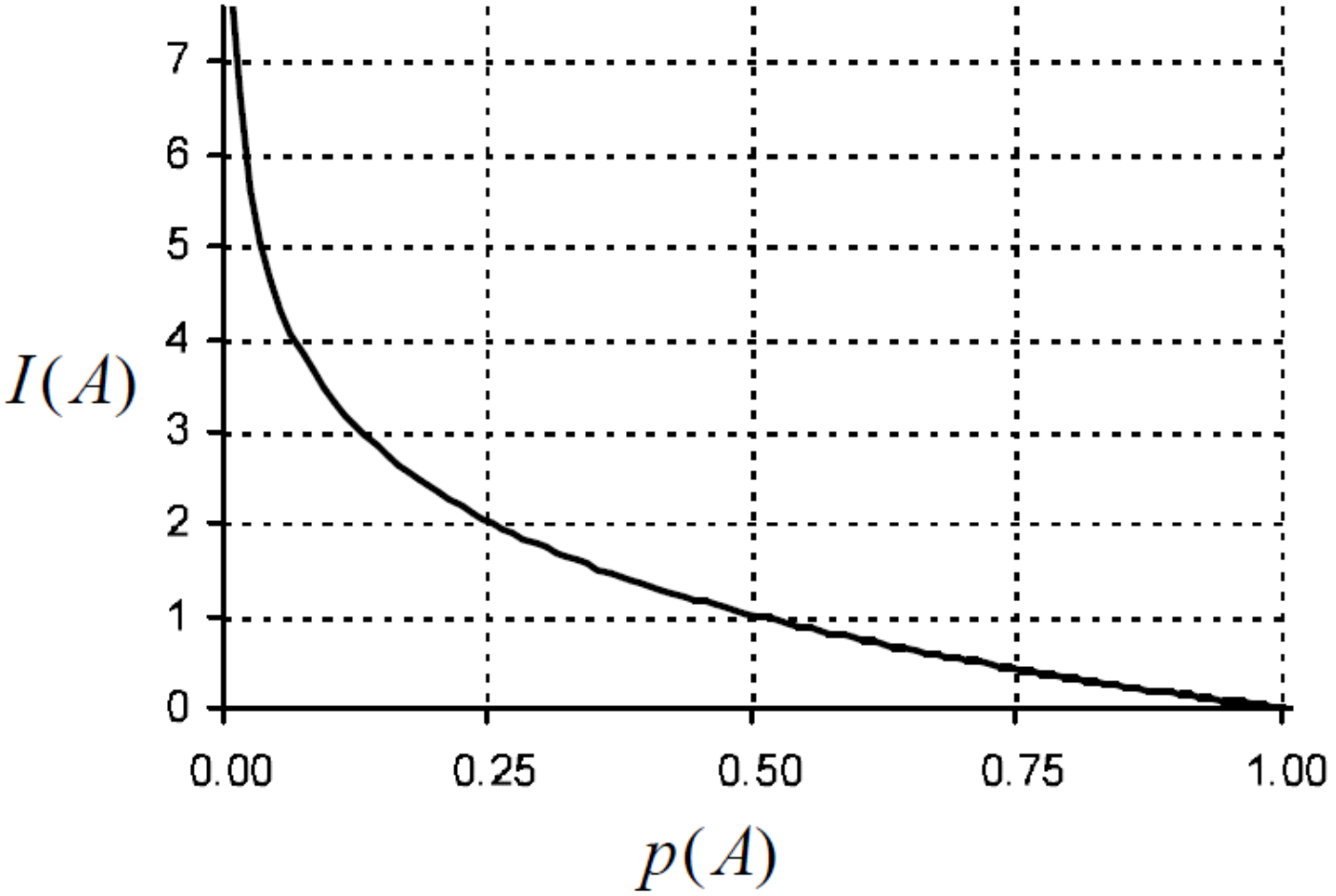
• Αποδεικνύεται ότι η **Πληροφορία** (μέτρο της πληροφορίας) δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{I(A)} = -\log_K p_A}$$

• Από εδώ και πέρα K=2, και μονάδα μέτρησης της πληροφορίας είναι το **bit**.

Μέτρο της Πληροφορίας

- Γραφική παράσταση της συνάρτησης της πληροφορίας



Μέτρο της Πληροφορίας

- **Εφαρμογή:** Έστω ότι έχουμε τα παρακάτω σύνολα γεγονότων:

I. $E=[A_1, A_2]$ $P=[\frac{1}{256}, \frac{255}{256}]$ **Απ.:** $I(A_1)$=8 bit, $I(A_2)$=0.0056 bit

II. $E=[B_1, B_2]$ $P=[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ **Απ.:** $I(B_1)$=1 bit, $I(B_2)$=1 bit

III. $E=[\Gamma_1, \Gamma_2]$ $P=[\frac{7}{16}, \frac{9}{16}]$ **Απ.:** $I(\Gamma_1)$=1.19 bit, $I(B_2)$=0.830 bit

Να βρεθούν τα μέτρα της πληροφορίας όλων των γεγονότων.

- Παρατηρήσεις:
  - Στην I περίπτωση είναι εύκολο να μαντέψουμε ποιό γεγονός θα συμβεί.
  - Στην III περίπτωση αυτή η πρόβλεψη είναι δυσκολότερη.
  - Στην II περίπτωση είναι πολύ δύσκολο να προβλέψουμε το γεγονός που θα συμβεί.
- **Σχόλιο:**
  - Μήπως υπάρχει ένα μέτρο για να περιγράψει αυτή την **αβεβαιότητα** μας για το σύνολο των γεγονότων και όχι για το καθένα ξεχωριστά;

Εντροπία

- Η μέση **αβεβαιότητα** μας για το ποιό γεγονός θα συμβεί μέσα από ένα σύνολο γεγονότων ονομάζεται **εντροπία** και είναι ο σταθμισμένος μέσος όρος των μέτρων της πληροφορίας όλων των γεγονότων:

$$H = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i$$

- Ονομάζεται και μέση πληροφορία.
- Εδώ η μονάδες μέτρησης της εντροπίας είναι το bit/γεγονός.
- **Εφαρμογή:** Έστω ότι έχουμε τα παρακάτω σύνολα γεγονότων:

I. $E = [A_1, A_2]$ $P = [\frac{1}{256}, \frac{255}{256}]$ **Απ.:** H(E)=0.0368 bit

II. $E = [B_1, B_2]$ $P = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ **Απ.:** H(E)=1 bit

III. $E = [\Gamma_1, \Gamma_2]$ $P = [\frac{7}{16}, \frac{9}{16}]$ **Απ.:** H(E)=0.987 bit

Να βρεθεί η μέση πληροφορία που περιλαμβάνεται σε κάθε σύνολο γεγονότων.

Εφαρμογές

- **Εφαρμογή Ι**
  - Ποιά είναι η πληροφορία που περιέχει το γεγονότος: *«έριξα τα ζάρια και έτυχα έξη-πέντε»*? **Απ.:** I=4.17 bits
- **Εφαρμογή ΙΙ**
  - Πόση πληροφορία περιέχεται στον αριθμό κυκλοφορίας αυτοκινήτου μορφής *ΓΓΓαααα*, όπου *Γ* είναι κεφαλαίο γράμμα και *α* αριθμός. (Βοήθεια: για ελληνικές πινακίδες χρησιμοποιούνται 14 διεθνή γράμματα και ο τετραψήφιος αριθμός μπορεί να πάρει 9000 διαφορετικές τιμές) **Απ.:** I=24.56 bits
- **Εφαρμογή ΙΙΙ**
  - Να βρεθεί η εντροπία ενός ζαριού. **Απ.:** H=2.58 bits
- **Εφαρμογή ΙV**
  - Γνωρίζουμε από την ιστορία ότι ο τελευταίος αρχηγός της φυλής των Λιλιπούα είχε δύο παιδιά. Νεότερες έρευνες κατέληξαν σε δύο συμπεράσματα:

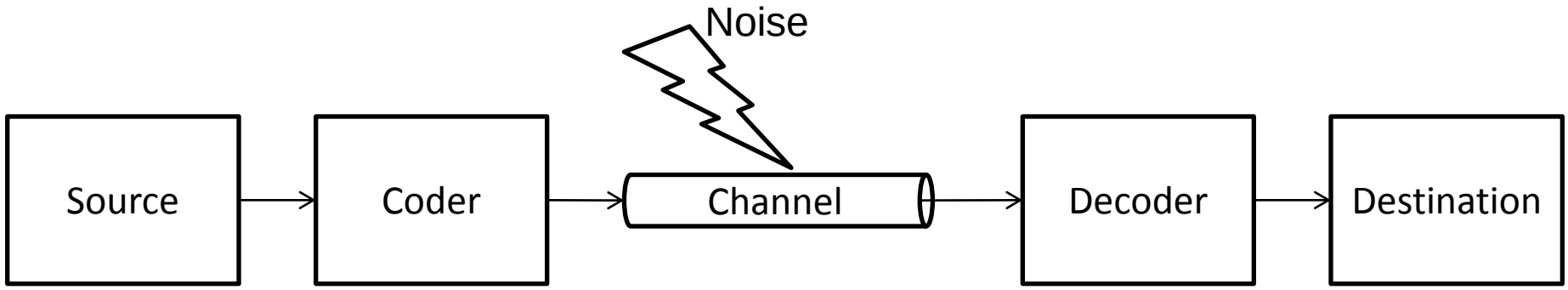
    Α. Ο αρχηγός είχε μια κόρη και ένα γιο.

    Β. Ο αρχηγός είχε μια κόρη και ένα μεγαλύτερο γιο.

    Πόση πληροφορία θα λάβουμε με την ανακοίνωση μόνο του πρώτου συμπεράσματος και πόση μόνο με την ανακοίνωση του δεύτερου; Πόση θα είναι η πληροφορία εάν ανακοινωθούν και τα δύο μαζί;

Γενικό Επικοινωνιακό Διάγραμμα

- **Σύμφωνα με την ΘτΠ (Shannon)**
  - γενικό σύστημα επικοινωνίας



- **Πηγή:** οποιοδήποτε άτομο ή μηχανή που παράγει πληροφορία.
- **Κωδικοποιητής:** μετατρέπει κάθε πληροφορία της πηγής σε μορφή κατάλληλη για μετάδοση.
- **Κανάλι επικοινωνίας:** το μέσο μέσω του οποίου μεταδίδεται η πληροφορία.
- **Αποκωδικοποιητής:** προσπαθεί να εξάγει την αρχική πληροφορία από την κωδικοποιημένη μορφή της.
- **Προορισμός:** οποιοδήποτε άτομο ή μηχανή που είναι ο αποδέκτης της πληροφορίας.

Ορισμοί

- **1ος Ορισμός**
  - ***Πληροφορία*** *είναι μία συλλογή δεδομένων, τα οποία καταγράφονται με τη χρήση συμβόλων.*
- **2ος Ορισμός**
  - ***Πηγή πληροφορίας*** *είναι κάθε σύστημα που παράγει στην έξοδο του πληροφορία.*
- **3ος Ορισμός**
  - ***Επικοινωνία*** *είναι κάθε διαδικασία μεταφοράς της πληροφορίας μεταξύ δύο σημείων του χωροχρόνου.*
- **4ος Ορισμός**
  - ***Αλφάβητο της Πηγής*** *είναι το σύνολο των διακεκριμένων (διαφορετικών) συμβόλων, x_1, x_2, …, x_N που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση της πληροφορίας που παράγεται από μία πηγή. Το αλφάβητο της πηγής συμβολίζεται ως: $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$. Το πλήθος N των συμβόλων δύναται να είναι πεπερασμένο ή άπειρο.*
- **5ος Ορισμός**
  - *Ως **λέξη** ορίζουμε μια διατεταγμένη ακολουθία συμβόλων.*
- **6ος Ορισμός**
  - *Ως **μήνυμα** ορίζουμε μια διατεταγμένη ακολουθία λέξεων.*

Πηγή Πληροφορίας

- Η πηγή παράγει στην έξοδο της πληροφορία η οποία έχει την μορφή συμβόλων.
- Τα σύμβολα προέρχονται από ένα σύνολο συμβόλων $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ (αλφάβητο).
- Το κάθε σύμβολο έχει μια πιθανότητα εμφάνισης στην έξοδο της πηγής. Συνολικά η πηγή έχει μια κατανομή πιθανοτήτων του συνόλου των συμβόλων που διαθέτει $P_X=\{p_{x1}, p_{x2}, \ldots, p_{xN}\}$.
- Η πηγή συμβολίζεται από την δυάδα που σχηματίζουν το αλφάβητο της και η κατανομή πιθανοτήτων των συμβόλων: $\mathbf{(X,P_X)}$
- Τα διαδοχικά σύμβολα που εκπέμπονται από την πηγή είναι στατιστικά ανεξάρτητα μεταξύ τους:
  - το σύμβολο που εκπέμπεται οποιαδήποτε χρονική στιγμή είναι ανεξάρτητο από προηγούμενες επιλογές. (**Διακριτή πηγή χωρίς μνήμη**)
- Ισχύουν:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$$

$$I(x_i) = -\log p_{x_i} \quad \text{Πληροφορία συμβόλου}$$

Εντροπία Πηγής Πληροφορίας

- Η **εντροπία πηγής** είναι ένα μέγεθος που σχετίζεται με την πηγή συνολικά.
- Εκφράζει την μέση αβεβαιότητα που έχουμε για το ποιό σύμβολο θα εμφανιστεί στην έξοδο της πηγής.

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} p_{x_i} \log p_{x_i}$$ Εντροπία πηγής

- Μετράται σε **bits/symbol**.
- Όταν αναφερόμαστε σε πηγή πληροφορίας οι μονάδες εντροπίας θα είναι **bits/symbol**.
- Ιδιότητες της εντροπίας:
  - Είναι μη αρνητική:

$$H(X) \geq 0$$

  - Είναι συνεχής συνάρτηση των πιθανοτήτων $p_1, p_2, \ldots, p_N$.
    - Δηλαδή, μια μικρή μεταβολή στις πιθανότητες προκαλεί μικρή μόνο μεταβολή στην τιμή της εντροπίας.

Εντροπία Πηγής Πληροφορίας

- **Μέγιστη εντροπία**
  - Η εντροπία μιας πηγής (X,P_X) διακριτών συμβόλων είναι μέγιστη όταν τα σύμβολα της πηγής είναι ισοπίθανα:

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_N = \frac{1}{N}$$

Η αβεβαιότητα μας (εντροπία) για την έξοδο της πηγής είναι μέγιστη όταν όλα τα σύμβολα της πηγής έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης. Άρα τα όρια της εντροπίας πηγής είναι:

$$\boxed{0 \le H(X) \le \log N}$$

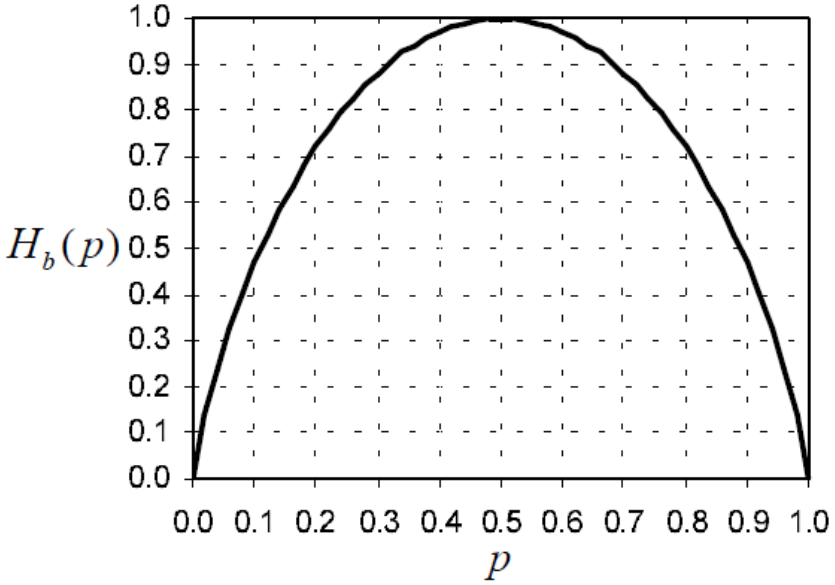
- **Ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας**
  - Αν ο ρυθμός εκπομπής συμβόλων στο επικοινωνιακό κανάλι είναι ***r*** σύμβολα/sec τότε ο **μέσος ρυθμός πληροφορίας, *R***, στην είσοδο του καναλιού είναι:

$$\boxed{R = H \cdot r} \quad bits/\sec$$

Εντροπία Δυαδικής Πηγής

- **Δυαδική πηγή πληροφορίας**
  - το αλφάβητο της διαθέτει δύο σύμβολα, π.χ. X={0,1}, X={A,B}.
- Εντροπία Δυαδικής Πηγής δίνεται από την **Συνάρτηση Shannon**:

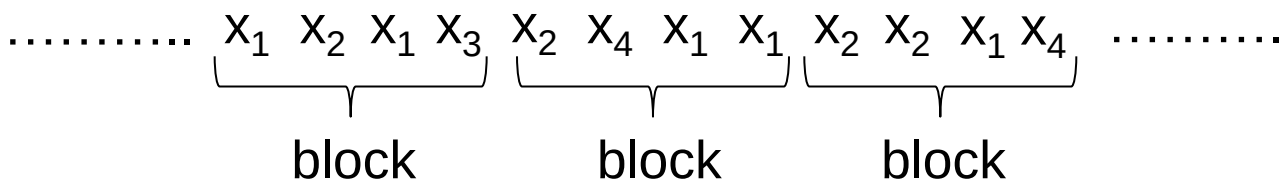
$$H_b(p) = -p\log p - (1-p)\log(1-p)$$



- Παρατηρήσεις:
  - Όταν ***p=0*** ή ***p=1***, η $H_b(p)=0$ γιατί 0log0=0 και 1log1=0.
  - Όταν ***p=½*** ,η $H_b(p)=1$ (μέγιστη τιμή)

Επέκταση Πηγής Πληροφορίας

• Πολλές φορές είναι χρήσιμο να θεωρούμε **τμήματα (blocks)** συμβόλων αντί για μεμονωμένα σύμβολα:



• Το κάθε τμήμα αποτελείται από ***n*** σύμβολα πηγής (λέξεις σταθερού μήκους).

• Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το κάθε **υπερ-σύμβολο (block)** παράγεται από μια **εκτεταμένη πηγή** X^n με αλφάβητοτο οποίο αποτελείται από N^n διακριτά υπερ-σύμβολα, όπου N ο αριθμός των διακριτών συμβόλων της αρχικής πηγής X.

• **Παράδειγμα:** έστω η δυαδική πηγή $X=\{0,1\}$ με κατανομή $P_x=\{p_0,p_1\}$. Η δεύτερη επέκταση της θα παράξει την εκτεταμένη πηγή $X^2=\{00,01,10,11\}$ η οποία θα έχει κατανομή $P_X^2=\{p_0p_0, p_0p_1, p_1p_0, p_1p_1\}$ (διότι τα σύμβολα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους).

• Εντροπία ***n***-ιοστής επέκτασης πηγής:

$$H(X^n) = -\sum_{i=1}^{N^n} p_{si} \log p_{si}$$

$$\text{όπου } p_{s_i} \text{ πιθανότητα υπερ-συμβόλου}$$

• ***Γενικά***

$$H(X^n) = n \cdot H(X)$$

Εφαρμογές

• **Εφαρμογή I:** Να υπολογιστεί η εντροπία ενός νομίσματος, όταν:

α) αυτό είναι τίμιο. **Απ.:** H=1 bit

β) η ένδειξη «κεφαλή» έχει δύο φορές μεγαλύτερη πιθανότητα να εμφανιστεί από την ένδειξη «γράμματα». **Απ.:** H=0.918 bits

• **Εφαρμογή II:** Θεωρούμε πηγή με αλφάβητο $X=\{0,1\}$. Και $p_1=0.7$. Να βρεθεί η πληροφορία του κάθε συμβόλου της πηγής. Επίσης, να βρεθεί η εντροπία της πηγής.

Απ.: I(1)=0.515 bits, I(0)=1.737 bits, H(X)=0.8816 bits/symbol

• **Εφαρμογή III :** Μία πηγή έχει αλφάβητο $X=\{O,E,B,\Delta\}$ και κατανομή πιθανοτήτων $P_X=\{1/2, 1/4, 1/8, 1/8\}$. Εάν το κάθε σύμβολο του αλφαβήτου είναι ανεξάρτητο, ποιά η πληροφορία της λέξης OEO. Ποιά η εντροπία της πηγής; **Απ.:** I(OEO)=4 bits, H(X)=1.75 bits/sym

• **Εφαρμογή IV:** Θεωρούμε μια πηγή X με N σύμβολα και κατανομή πιθανοτήτων $P_X=\{p_1,p_2,\ldots,p_N\}$. Να αποδειχθεί ότι για την εντροπία ισχύει:

$$H(p_1, p_2, p_3,..., p_N) = H(p_1 + p_2, p_3,..., p_N) + (p_1 + p_2) \cdot H\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right)$$

• **Εφαρμογή V:** Θεωρούμε διακριτή πηγή χωρίς μνήμη με αλφάβητο πηγής $X=\{s_0,s_1,s_2\}$ και κατανομή $P_X=\{¼, ¼, ½\}$. Να γραφεί το αλφάβητο, η κατανομή πιθανοτήτων και να βρεθεί η εντροπία της δεύτερης επέκτασης της πηγής X.

Σχετική Εντροπία – Απόκλιση KL

- **Σχετική εντροπία**
  - Αν $\boldsymbol{P_X=\{p_1,p_2,\ldots,p_N\}}$ και $\boldsymbol{Q_X=\{q_1,q_2,\ldots,q_N\}}$ είναι δύο εναλλακτικές κατανομές πιθανοτήτων των συμβόλων $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_N\}$ μιας πηγής τότε:

$$H(X,P_X/Q_X)=\sum_{i=1}^{N} p_i \log\frac{p_i}{q_i}$$

Είναι η **απόκλιση Kullback-Leibler** των κατανομών P_X και Q_X για το αλφάβητο X.

Πρόκειται για μια μέθοδο «σύγκρισης» δύο διαφορετικών κατανομών για την ίδια τυχαία μεταβλητή.

Σχετική Εντροπία – Απόκλιση KL

• **Παράδειγμα:** Έστω μια πηγή πληροφορίας με αλφάβητο **X={Κ,Γ}**. Τα σύμβολα εμφανίζονται στην έξοδο της πηγής μετά την ρίψη ενός νομίσματος. Το σύμβολο Κ εάν το αποτέλεσμα της ρίψης είναι «Κεφαλή» και το σύμβολο Γ εάν είναι «Γράμματα». Εάν θέλαμε να σχεδιάσουμε ένα επικοινωνιακό σύστημα τότε θα θεωρούσαμε ως κατανομή πιθανοτήτων της πηγής Χ την θεωρητική κατανομή πιθανοτήτων $\mathbf{Q_X}$**={0.5,0.5}**. Ωστόσο, στην πραγματικότητα η κατανομή πιθανοτήτων μπορεί να είναι $\mathbf{P_X}$**={0.4,0.6}** λόγω των αλλοιώσεων στην μορφολογία του νομίσματος.

• Επομένως θα είχαμε λάβει ως κατανομή πιθανοτήτων της πηγής **X** την $\mathbf{Q_X}$ (μοντέλο) ενώ η πραγματική κατανομή θά είναι η $\mathbf{P_X}$.

• Αυτή η αναποδοτικότητα φαίνεται από την απόκλιση Kullback-Leibler:

$$H(X, P_X / Q_X) = \sum_{i=1}^{N} p_i \log \frac{p_i}{q_i} = 0.4 \log \frac{0.4}{0.5} + 0.6 \log \frac{0.6}{0.5} = 0.029049406 \quad bits/symbol$$

• Θα θεωρήσουμε ότι επιπλέον 0.029 bits/symbol ότι θα παραχθούν από την πηγή

• Προφανώς θα ισχύει:

$$H(X, P_X / P_X) = 0$$

Ερμηνεία της Σχετικής Εντροπίας

- Σημασία της σχετικής εντροπίας:
  - Εκφράζει την απόκλιση της κατανομής P_X από την Q_X. Πόση δηλαδή επιπλέον πληροφορία ανά σύμβολο θα παραχθεί από την πηγή εάν θεωρήσουμε ως κατανομή πιθανοτήτων των συμβόλων της πηγής την Q_X, ενώ στην πραγματικότητα είναι η P_X.
  - Η απόκλιση Kullback-Leibler «αποκαλύπτει» και ποσοτικοποιεί την αναποδοτικότητα που θα υπάρξει εάν ο σχεδιασμός ενός επικοινωνιακού συστήματος βασιστεί στην λανθασμένη κατανομή.
- Η σχετική εντροπία είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός:

$$H(X, P_X / Q_X) = 0 \quad \gamma\iota\alpha \; P_X = Q_X$$
$$H(X, P_X / Q_X) > 0 \quad \gamma\iota\alpha \; P_X \neq Q_X$$

- Η σχετική εντροπία δεν είναι συμμετρική ως προς τις δύο κατανομές:

$$H(X, P_X / Q_X) \neq H(X, Q_X / P_X)$$

Γι' αυτό και λέγεται **απόκλιση (divergence)** και <u>όχι</u> **απόσταση (distance).**

Εφαρμογές

• **Εφαρμογή Ι:** Θεωρούμε την πηγή $X=\{0, 1\}$ με δύο ενναλακτικές κατανομές πιθανοτήτων, $P_X=\{0.3,0.7\}$ και $Q_X=\{0.6,0.4\}$. Να υπολογιστούν οι αποκλίσεις Kullback-Leibler, $H(X, P_X/Q_X\}$ και $H(X, Q_X/P_X\}$.

Απ.: $H(X,P_X/Q_X)=0.2651$ bits/symbol, $H(X,Q_X/P_X)=0.277$ bits/symbol

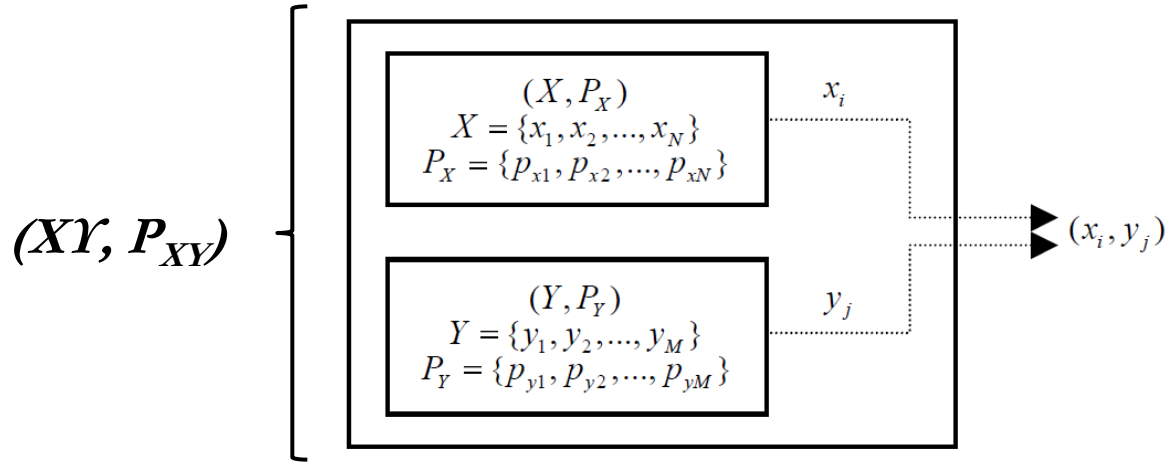
• **Εφαρμογή ΙΙ:** Να υπολογιστούν οι αποκλίσεις Kullback-Leibler μεταξύ των εναλλακτικών κατανομών πιθανοτήτων $P=\{0.2,0.3,0.5\}$ και $Q=\{0.4,0.5,0.1\}$. Ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα; **Απ.:** $H(X,P_X/Q_X)=0.741$ bits/symbol, $H(X,Q_X/P_X)=0.536$ bits/symbol, Όχι δεν ισχύει

• **Εφαρμογή ΙΙΙ:** Να δειχθεί ότι:

$$H(X,P_X/Q_X)+H(X,Q_X/P_X)=\sum_{i=1}^{N}(p_i-q_i)\log\frac{p_i}{q_i}$$

Συνδετική Εντροπία

- Θεωρούμε την **σύνθετη πηγή** (XY,P_{XY}):



- Αλφάβητο της νέας πηγής:

$$XY=\{(x_1,y_1),(x_2,y_1),...,(x_N,y_1),(x_1,y_2),(x_2,y_2),...,(x_N,y_2),...,(x_1,y_M),(x_2,y_M),...,(x_N,y_M)\}$$

- Εντροπία της σύνθετης πηγής:

$$H(XY)=-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}p(x_i,y_j)\log p(x_i,y_j)$$

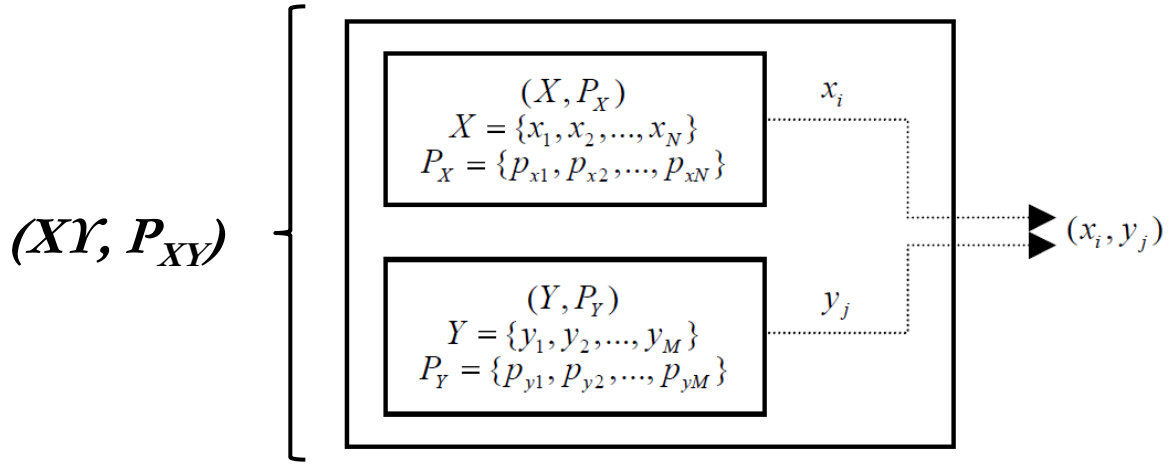
- Ισχύει:

$$H(XY)=H(X)+H(Y) \quad \text{εάν οι πηγές είναι ανεξάρτητες}$$

$$H(XY)<H(X)+H(Y) \quad \text{αλλιώς}$$

Υπό Συνθήκη Εντροπία Σύνθετης Πηγής

- Θεωρούμε την **σύνθετη πηγή** (XY,P_{XY}):



- Θεωρούμε ότι γνωρίζουμε εκ των προτέρων την έξοδο της πηγής (Y,P_Y). Δηλαδή ισχύει:

$$p(x_i \mid y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}$$

- Η **υπό συνθήκη εντροπία** της σύνθετης πηγής (XY,P_{XY}) γνωρίζοντας την έξοδο της απλής πηγής (Y,P_Y) δίνεται:

$$H(X \mid Y) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p(x_i, y_j)\log p(x_i \mid y_j)$$

- Αντίστοιχα θα ισχύει:

$$H(Y \mid X) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p(x_i, y_j)\log p(y_j \mid x_i)$$

Υπό Συνθήκη Εντροπία Σύνθετης Πηγής

- Σχέση υπο συνθήκη εντροπίας με την συνδετική εντροπία και τις εντροπίες πηγών:

$$H(X \mid Y) = H(XY) - H(Y)$$

- Η παραπάνω σχέση ερμηνεύεται και διαισθητικά:
  - Η υπό συθνήκη εντροπία $H(X|Y)$ γνωρίζοντας την έξοδο μιας απλής πηγής $H(Y)$ θα προκύπτει εάν από την συνδετική εντροπία της πηγής $H(XY)$ αφαιρέσουμε την εντροπία της γνωστής πηγής $H(Y)$.
- Προφανώς θα ισχύει:

$$H(Y \mid X) = H(XY) - H(X)$$

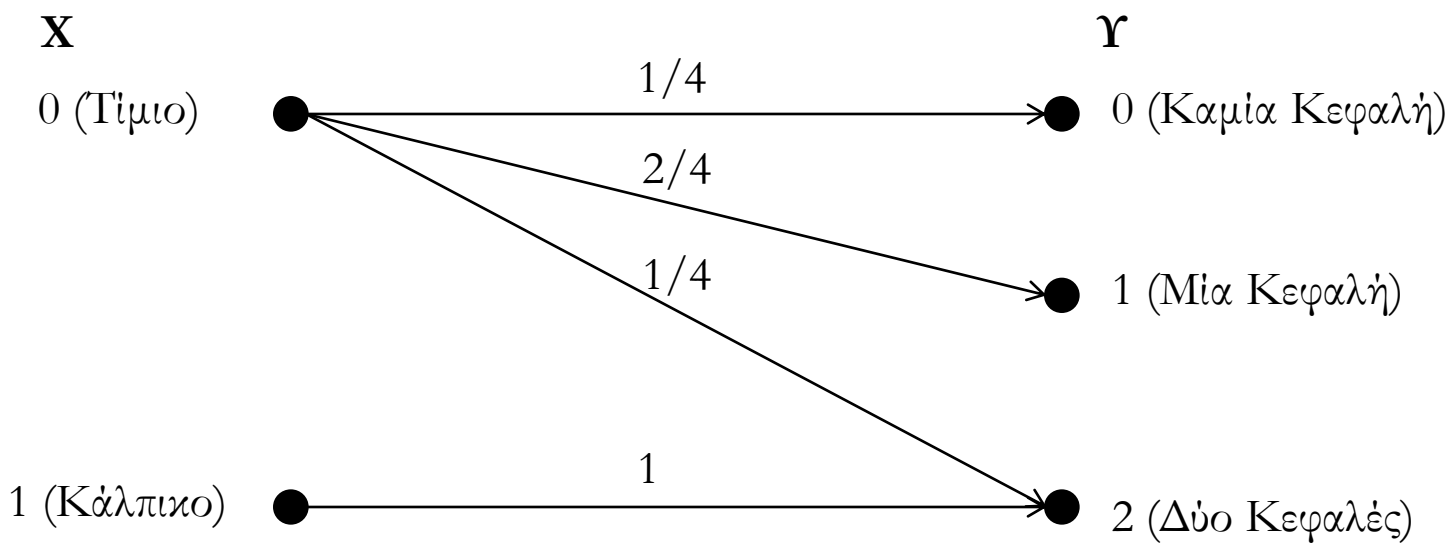
Διαπληροφορία

- Εκτελούμε το ακόλουθο πείραμα:
  1. Διαθέτουμε 2 νομίσματα. Το ένα «τίμιο» και το άλλο «κάλπικο». Το «κάλπικο» διαθέτει δύο Κεφαλές.
  2. Επιλέγουμε ένα από τα δύο νομίσματα **τυχαία** και το ρίχνουμε δύο φορές.
  3. Καταγράφουμε τον αριθμό των κεφαλών που προκύπτουν.
- Κατόπιν κάνουμε την ερώτηση:

  «Πόση πληροφορία πήραμε για την ταυτότητα του νομίσματος (τίμιο ή κάλπικο) μετρώντας πόσες Κεφαλές είδαμε στο τέλος του πειράματος;»
- ***Παρατηρήσεις***
  - **Σίγουρα** ο αριθμός των κεφαλών μπορεί να μας δώσει μια ιδέα για το ποιο νόμισμα επιλέχθηκε:
    - Αριθμός Κεφαλών<2, **σίγουρα** το νόμισμα που επιλέχθηκε ήταν το τίμιο νόμισμα.
    - Αριθμός Κεφαλών=2, τότε ενδεχομένως να επιλέχθηκε το κάλπικο νόμισμα.

Διαπληροφορία

- Έστω:
  - Τυχαία μεταβλητή Χ=«επιλογή του νομίσματος» (0 για το τίμιο και 1 για το κάλπικο).
  - Τυχαία μεταβλητή Υ=«ο αριθμός των κεφαλών» (0 για καμία 1 για μία και 2 για δύο).
- Γραφική αναπαράσταση του πειράματος:



Δειγματοχώρος «Τίμιου» Ζαριού
1. ΚΓ
2. ΓΚ
3. ΚΚ
4. ΓΓ

Δειγματοχώρος «Κάλπικου» Ζαριού
1. ΚΚ

Διαπληροφορία

- Θεωρούμε τον δίαυλο πληροφορίας που στην είσοδο και στην έξοδο του λειτουργούν δυο πηγές πληροφορίας (X,P_X) και (Y,P_Y).
- Θεωρούμε παρατηρητή στην έξοδο (δηλαδή στην πηγή (Y,P_Y)).
- Κάποια στιγμή ο παρατηρητής βλέπει στην πηγή (Y,P_Y) το σύμβολο y_j.
- **Ερώτημα:**
  - «Βλέποντας το σύμβολο y_j, πόση πληροφορία αποκόμισε ο παρατηρητής για το ποιό σύμβολο x_i εκπέμθηκε αρχικά από την πηγή στην είσοδο του διαύλου;»
- Άρχικά (πριν την εμφάνιση του συμβόλου y_j στην έξοδο του διαύλου)
  - η αβεβαιότητα του παρατηρητή για το ποιό σύμβολο θα εμφανιστεί στην είσοδο του διαύλου είναι $H(X)$.
- Με την εμφάνιση του συμβόλου y_j
  - η αβεβαιότητα του μειώθηκε κατά $H(X|Y)$.

Διαπληροφορία

- Άρα:
  - Η πληροφορία που αποκόμισα για την πηγή X γνωρίζοντας το αποτέλεσμα της πηγής Y θα είναι:

$$I(X \to Y) = H(X) - H(X \mid Y)$$

- Η **I(X→Y)** ονομάζεται διαπληροφορία και προσδιορίζει: «πόσο μειώθηκε η αβεβαιότητα του παρατηρητή για την έξοδο της πηγής X γνωρίζοντας την έξοδο της πηγής Y».
- Πρακτικά εκφράζει το ποσό της πληροφορίας που μεταφέρθηκε από την είσοδο του διαύλου στην έξοδο του (σε **bits/symbol**).
- Ιδιότητες
  - Η **I(X→Y)** είναι συμμετρική συνάρτηση. Δηλαδή ισχύει:

$$I(X \to Y) = I(Y \to X) = H(Y) - H(Y \mid X)$$

  - Η **I(X→Y)** είναι μη αρνητική:

$$I(X \to Y) \geq 0$$

  - Πότε η διαπληροφορία είναι ίση με μηδέν;

Εφαρμογές

• **Εφαρμογή I:** Να δείξετε ότι για τις πηγές X (στην είσοδο ενός διαύλου) και Y (στην έξοδο του διαύλου) ισχύει:

$$H(Y) = H(X) - H(X \mid Y) + H(Y \mid X)$$

• **Εφαρμογή II:** Να δείξετε ότι για τις πηγές X (στην είσοδο ενός διαύλου) και Y (στην έξοδο του διαύλου) ισχύει:

$$I(X \to Y) = H(X) - H(XY) + H(Y)$$

• **Εφαρμογή III:** Να δείξετε ότι ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$I(X \to Y) = H\left(XY, P_{XY} / \left(P_X \cdot P_Y\right)\right)$$

• **Εφαρμογή IV:** Θεωρούμε δυο δυαδικές πηγές πληροφορίας με αλφάβητα $X=\{x_1,x_2\}$ και $Y=\{y_1,y_2\}$, αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι εξής πιθανότητες: $p(x_1)=0.2$, $p(y_1)=0.3$ και $p(x_1,y_2)=0.15$. Να βρεθούν:

1. Οι εντροπίες των πηγών. **Απ.:** H(X)=0.722bits/symbol, H(Y)=0.881bits/symbol
2. Η συνδετική εντροπία της σύνθετης πηγής. **Απ.:** H(XY)=1.601bits/symbol
3. Οι υπό συνθήκη εντροπίες. **Απ.:** H(X|Y)=0.720bits/symbol, H(Y|X)=0.879bits/symbol
4. Η διαπληροφορία μεταξύ των πηγών X και Y. **Απ.:** I(X→Y)=0.002bits/symbol

Ασκήσεις Επανάληψης

- **Εφαρμογή I** (Εξεταστική 2009):
  - Έστω δύο δυαδικές πηγές Α και Β. Υποθέτουμε ότι $0<p_A(0)<p_B(0)<0.5$. Ποιά δυαδική πηγή έχει την μεγαλύτερη εντροπία; **Απ.:** η Β.
- **Εφαρμογή II** (Εξεταστική 2009):
  - Έστω μια τριαδική πηγή $A=\{0,1,2\}$. Υπολογίστε τις πιθανότητες $p(0)$, $p(1)$ και $p(2)$, έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η εντροπία της πηγής Α. **Απ.:** $p(0)=p(1)=p(2)=1/3$
- **Εφαρμογή III** (Εξεταστική 2007):
  - Θεωρούμε δυο δυαδικές πηγές πληροφορίας $X=\{x_1,x_2\}$ και $Y=\{y_1,y_2\}$ για τις οποίες ισχύουν $p(x_2)=0.2$, $p(y_1)=0.3$ και $p(y_2|x_2)=0.3$. Να βρεθούν:
    1. Οι εντροπίες $H(X)$ και $H(Y)$. **Απ.:** $H(X)=0.721$bits/symbol, $H(Y)=0.881$bits/symbol
    2. Η συνδετική εντροπία $H(XY)$. **Απ.:** $H(XY)=1.475$bits/symbol
    3. Η διαπληροφορία $I(X;Y)$ των πηγών. **Απ.:** $I(X\rightarrow Y)=0.127$bits/symbol
- **Εφαρμογή IV**
  - Ρίχνουμε ένα «τίμιο» ζάρι μια φορά. Εάν το αποτέλεσμα είναι 1, 2, 3, ή 4, τότε ρίχνουμε ένα «τίμιο» νόμισμα μια φορά. Εάν η ένδειξη του ζαριού είναι 5 ή 6, τότε ρίχνουμε το νόμισμα δύο φορές. Να βρεθεί η πληροφορία που αποκομίσαμε για την ένδειξη του ζαριού από την καταμέτρηση των «Κεφαλών» μετά την ρίψη/εις του νομίσματος. **Απ.:** $H(X)\sim0.918$ bits, $H(Y)\sim1.324$ bits, $H(XY)\sim2.083$ bits $\longrightarrow$ $I(X\rightarrow Y)\sim0.16$bits