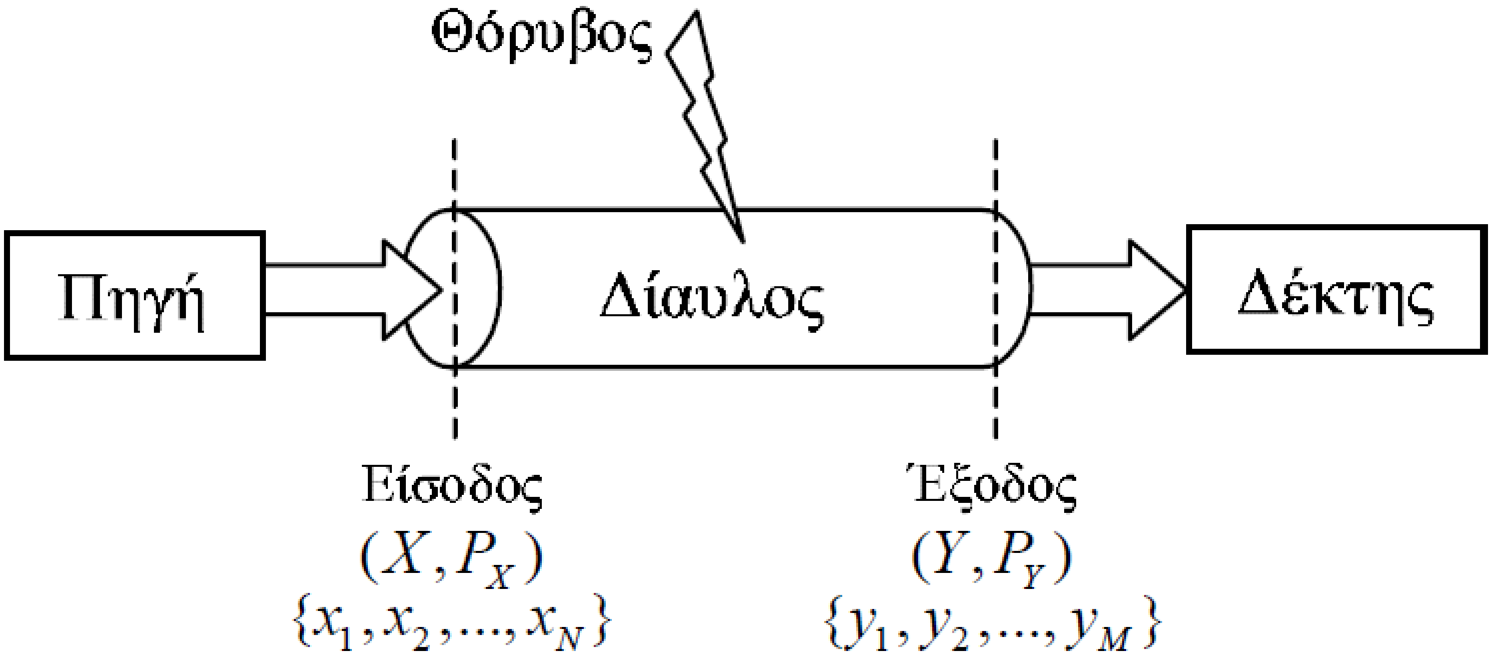
Δίαυλος Πληροφορίας



- Η λειτουργία του διαύλου πληροφορίας περιγράφεται από:
  - Τον **πίνακα διαύλου** (μαθηματική περιγραφή).
  - Το **διάγραμμα διάυλου** (παραστατικός τρόπος περιγραφής).

Πίνακας Διαύλου

- Κατασκευάζεται με την τοποθέτηση των υπό συνθήκη πιθανοτήτων εμφάνισης των συμβόλων $\mathbf{y_j}$ (στην έξοδο του διαύλου) δεδομένου των συμβόλων $\mathbf{x_i}$ (στην είσοδο του διαύλου), σε έναν N×M πίνακα:

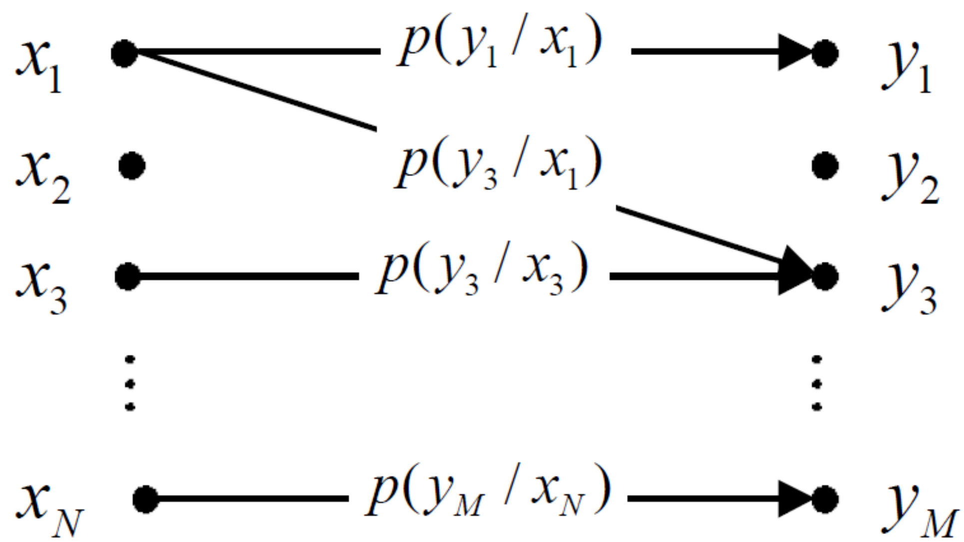
$$P_{Y|X} = \begin{array}{cc}
\overbrace{\begin{array}{cccc} \quad y_1 \quad & \quad y_2 \quad & \quad\quad & \quad y_M \quad \end{array}}^{\text{M στήλες}} & \\
\begin{bmatrix}
p(y_1 | x_1) & p(y_2 | x_1) & \dots & p(y_M | x_1) \\
p(y_1 | x_2) & p(y_2 | x_2) & \dots & p(y_M | x_2) \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
p(y_1 | x_N) & p(y_2 | x_N) & \dots & p(y_M | x_N)
\end{bmatrix} & \left.\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_N \end{array}\right\} \text{N γραμμές}
\end{array}$$

- Ο πίνακας διαύλου ελέγχει τη ροή πληροφορίας από την είσοδο στην έξοδο του διαύλου, αφού μετασχηματίζει την κατανομή των πιθανοτήτων των συμβόλων στην είσοδο στην κατανομή πιθανοτήτων των συμβόλων στην έξοδο:

$$P_Y = P_X \cdot P_{Y|X}$$

Διάγραμμα Διαύλου

- Κατασκευάζεται με την αντιστοίχιση των συμβόλων εισόδου $\mathbf{x_i}$ στα σύμβολα εξόδου $\mathbf{y_j}$ και την τοποθέτηση των υπό συνθήκη πιθανοτήτων $\mathbf{p(y_j|x_i)}$ στις ακμές που τα συνδέουν:



- Γενικά:
  - ένα ή περισσότερα σύμβολα εισόδου μπορεί να αντιστοιχούν σε ένα σύμβολο εξόδου.
  - ένα ή περισσότερα σύμβολα εξόδου μπορεί να προέρχονται από ένα σύμβολο εισόδου.

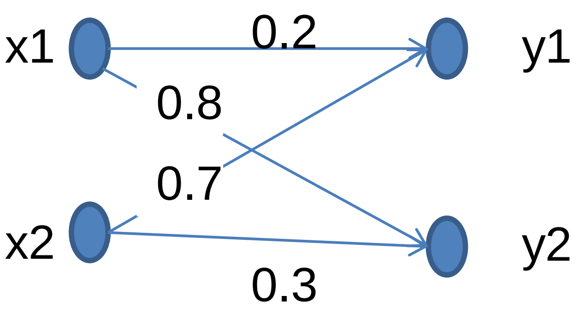
Εφαρμογές

- **Εφαρμογή Ι:**
  - Δίνεται ο παρακάτω πίνακας διαύλου:

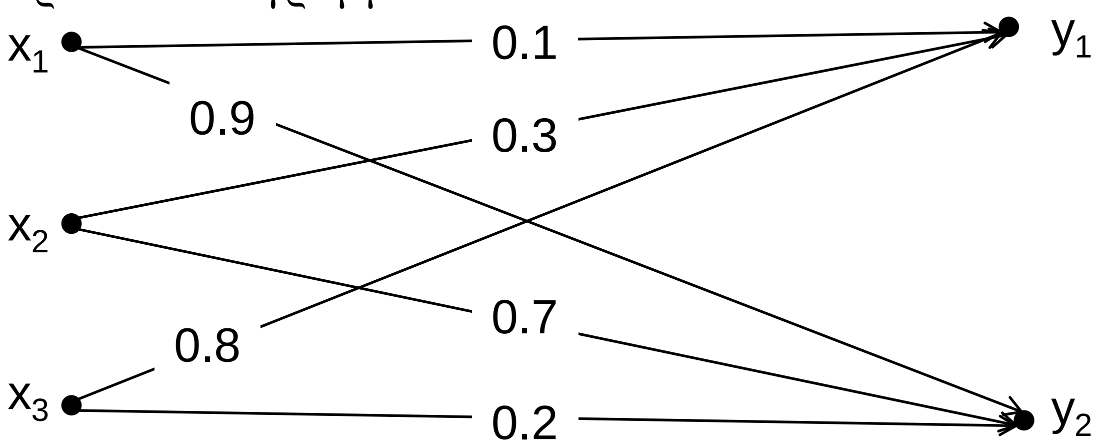
$$P_{Y|X} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Να σχεδιαστεί το διάγραμμα διαύλου.

Απ.:



- **Εφαρμογή ΙΙ:**
  - Δίνεται το παρακάτω διάγραμμα διαύλου:



Να γραφεί ο πίνακας διαύλου $P_{Y|X}$.

Απ.:

$$P_{Y|X} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Εντροπία Συστήματος Διαύλου

• Εάν γράψουμε την κατανομή πιθανοτήτων της πηγής στην είσοδο του διαύλου με τη μορφή διαγώνιου πίνακα:

$$D_X = \begin{bmatrix} p(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(x_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p(x_N) \end{bmatrix}$$

Τότε θα προκύψει:

$$D_X \cdot P_{Y|X} = \begin{bmatrix} p(x_1,y_1) & p(x_1,y_2) & \dots & p(x_1,y_M) \\ p(x_2,y_1) & p(x_2,y_2) & \dots & p(x_2,y_M) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(x_N,y_1) & p(x_N,y_2) & \dots & p(x_N,y_M) \end{bmatrix} = P_{XY}$$

• Ο πίνακας P_{XY} λέγεται **πίνακας συνδετικών πιθανοτήτων** και από αυτόν μπορούμε να υπολογίσουμε την εντροπία H(XY) η οποία ονομάζεται **εντροπία συστήματος διαύλου.**

Εντροπία Θορύβου

- Θεωρώντας έναν παρατηρητή στην είσοδο του διαύλου, η **αβεβαιότητα** του (μέση πληροφορία που χρειάζεται) για το ποιο σύμβολο θα εμφανιστεί στην έξοδο του διαύλου είναι ίση με την υπό συνθήκη εντροπία H(Y|X).
- Αν H(Y|X)=0, τότε ο παρατηρητής είναι απόλυτα βέβαιος για το ποιό σύμβολο βγήκε στην έξοδο του διαύλου.
- Ο παρατηρητής οφείλει αυτή την απώλεια πληροφορίας (αβεβαιότητα) στην παρουσία **θορύβου** στον δίαυλο πληροφορίας.
- Εντροπία Θορύβου:

$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p(x_i, y_j)\log[p(y_j|x_i)]$$

Εντροπία Διαύλου

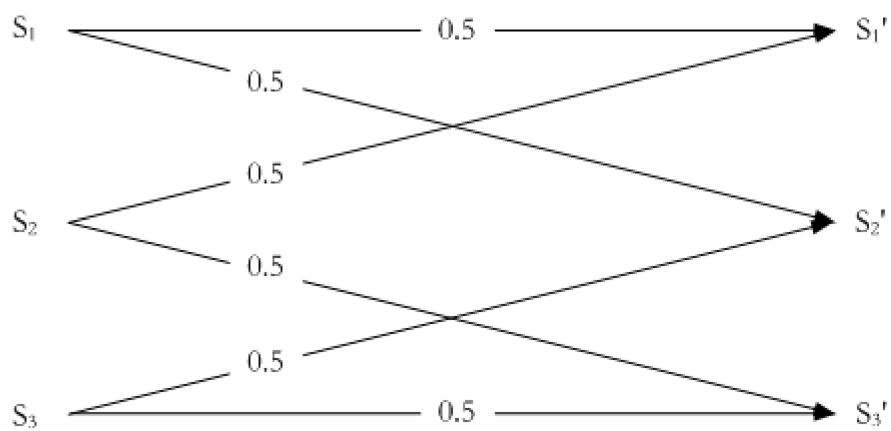
- Θεωρώντας έναν παρατηρητή στην έξοδο του διαύλου, η **αβεβαιότητα** του (μέση πληροφορία που χρειάζεται) για το ποιο σύμβολο θα εμφανιστεί στην είσοδο του διαύλου είναι ίση με την υπό συνθήκη εντροπία Η(Χ|Υ).
- Αν Η(Χ|Υ)=0, τότε ο παρατηρητής είναι απόλυτα βέβαιος για το ποιό σύμβολο εισήχθηκε στην είσοδο του διαύλου.
- Ο παρατηρητής οφείλει αυτή την απώλεια πληροφορίας στη **δομή** του διαύλου.
- Εντροπία Διαύλου:

$$H(X|Y) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p(x_i, y_j)\log[p(x_i|y_j)]$$

<u>Προσοχή:</u> Η Εντροπία Διαύλου δέν είναι το ίδιο με την Εντροπία Συστήματος Διαύλου: (Η πρώτη είναι **υπο συνθήκη εντροπία** ενώ η δεύτερη είναι **συνδετική εντροπία**).

Εφαρμογές

- **Εφαρμογή Ι:**
  - Τρία σύμβολα S_1, S_2 και S_3 με πιθανότητες εμφάνισης $p_{S1}=0.6$, $p_{S2}=0.3$ και $p_{S3}=0.1$ διοχετεύονται σε επικοινωνιακό δίαυλο η λειτουργία του οποίου περιγράφεται από το παρακάτω διάγραμμα:



Να υπολογιστούν:

α) Ο Πίνακας Διαύλου $P_{Y|X}$. **Απ.:** $P_{Y|X}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & 0\\ 0.5 & 0 & 0.5\\ 0 & 0.5 & 0.5\end{bmatrix}$

β) Η εντροπία εισόδου H(X). **Απ.:** H(X)= 1.295 bits/symbol

γ) Η εντροπία εξόδου H(Y). **Απ.:** H(Y)= 1.512 bits/symbol

δ) Η διαπληροφρία I(X→Y). **Απ.:** I(X→Y)= 0.512 bits/symbol

Βοήθεια για το ερώτημσ δ): H(XY)~2.295 bits/symbol

Εφαρμογές

- **Εφαρμογή ΙΙ:**
  - Ο πίνακας των συνδετικών πιθανοτήτων των συμβόλων εισόδου-εξόδου ενός υποθετικού διαύλου πληροφορίας είναι:

$$P_{XY} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0.05 \\ 0.1 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.15 \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστούν:

α) Η εντροπία εισόδου H(X). **Απ.:** H(X)= 1.881 bits/symbol

β) Η εντροπία εξόδου H(Y). **Απ.:** H(Y)= 1.585 bits/symbol

γ) Ο Πίνακας Διαύλου $P_{Y|X}$. **Απ.:** $\longrightarrow P_{Y|X} = \begin{bmatrix} 0.714 & 0 & 0.285 \\ 0 & 0.857 & 0.142 \\ 0.666 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

δ) Η εντροπία θορύβου H(Y|X). **Απ.:** H(Y|X)= 0.646 bits/symbol

ε) Η εντροπία διαύλου H(X|Y). **Απ.:** H(X|Y)= 0.942 bits/symbol

ζ) Η διαπληροφρία I(X→Y). **Απ.:** I(X→Y)= 0.935 bits/symbol

Βοήθεια για τα ερωτήματα δ) και ε): H(XY)~ 2.527 bits/symbol

Χωρητικότητα Διαύλου Πληροφορίας

- Η διαπληροφορία Ι(Χ→Υ) εκφράζει **το ποσό της πληροφορίας** που μεταφέρθηκε από την είσοδο του διαύλου στην έξοδο του.
- Εάν προσδιορίσουμε την μέγιστη τιμή της Ι(Χ →Υ), τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την χωρητικότητα του διαύλου πληροφορίας που απαιτείται για να μεταφερθεί αυτό **το ποσό πληροφορίας** από την είσοδο του στην έξοδο.
- Άρα:

$$C = \max\left\{I(X \to Y)\right\}$$

- Αφού ισχύει:

$$I(X \to Y) = H(X) - H(X \mid Y)$$

Μπορούμε με κατάλληλη επιλογή της κατανομής πιθανοτήτων στην είσοδο P_X να μεγιστοποιήσουμε την χωρητικότητα C. Άρα:

$$C = \max_{P_X}\left\{I(X \to Y)\right\}$$

Χωρητικότητα Διαύλου Πληροφορίας

- Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι οι μονάδες της χωρητικότητας είναι **bits/symbol.**
- Μπορεί, όμως, να εκφραστεί και σε **bits/second**, εάν γνωρίζουμε την διάρκεια των συμβόλων, t:

$$C_t = \frac{1}{t} \cdot C \quad \text{bits/second}$$

- **Παράδειγμα:** Θεωρούμε ένα κανάλι με χωρητικότητα 1000 bits/symbol. Το κάθε σύμβολο διαρκεί 0.5 δευτερόλεπτο. Πόση είναι η χωρητικότητα του καναλιού σε bits/second;

$$C_t = \frac{1}{0.5} \cdot 1000 = 2000 \quad \text{bits/second}$$

Η χωρητικότητα του καναλιού μπορεί να θεωρηθεί και ως ο **ρυθμός μεταφοράς πληροφορίας** τον οποίο είναι ικανό το κανάλι να επιτύχει.

Χωρητικότητα Διαύλου Πληροφορίας

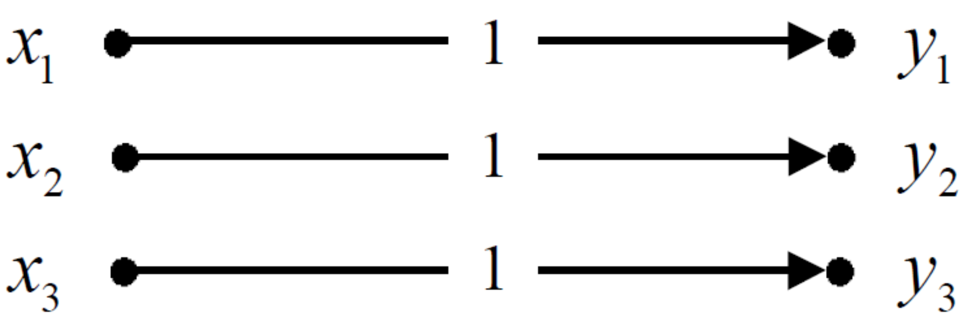
- Η χωρητικότητα προκύπτει εάν μεγιστοποιήσουμε την διαπληροφορία:

Ορισμός 3.1 (στο βιβλίο): ***Χωρητικότητα διαύλου πληροφορίας*** *C είναι το μέγιστο της διαπληροφορίας της εισόδου X και της εξόδου Y σε περιβάλλον θορύβου.*

- Επομένως επιχειρώντας μία μελέτη περιπτώσεων:
  - **C>I(X→Y):** Ισχύει, καθώς η διαπληροφορία είναι το ποσό της πληροφορίας που μεταδίδεται στον δίαυλο και δύναται να μην είναι πάντα η μέγιστη.
  - **C=I(X→Y):** Ισχύει όταν γίνεται η βέλτιστη εκμετάλλευση του διαύλου (μεταδίδεται η μέγιστη ποσότητα πληροφορίας).
  - **C<I(X→Y):** Δεν ισχύει καθώς δεν μπορεί να μεταφερθεί μεγαλύτερο ποσό πληροφορίας από αυτό που είναι ικανός ο δίαυλος να μεταφέρει.

Ιδανικός Δίαυλος

Διάγραμμα διαύλου:



Πίνακας διαύλου:

$$P_{Y|X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- Οι υπο συνθήκη πιθανότητες είναι ίσες με 0 ή 1. Άρα:

$$H(X/Y) = H(Y/X) = 0$$

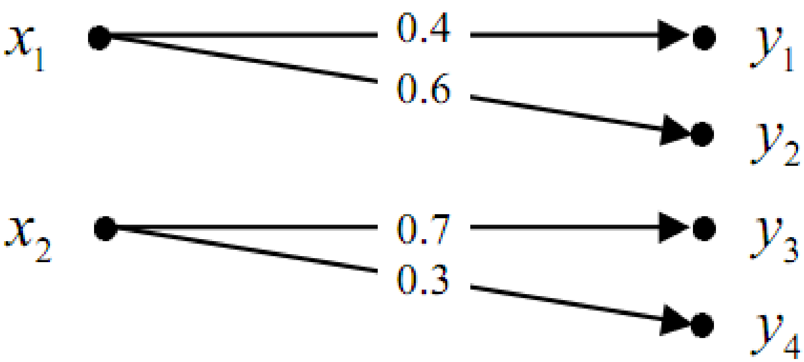
$$I(X;Y) = H(X) = H(Y)$$

- Άρα, η χωρητικότητα του ιδανικού διαύλου θα είναι:

$$C = \max_{P_X}\{I(X;Y)\} = \max_{P_X}\{H(X)\} = \max_{P_Y}\{H(Y)\} = \log(N)$$

Δίαυλος χωρίς Απώλειες

Διάγραμμα διαύλου:



Πίνακας διαύλου:

$$P_{Y|X} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

- Κάθε σύμβολο εξόδου προέρχεται από ένα μόνο σύμβολο εισόδου: οι πιθανότητες $p(x_i|y_j)$ είναι ίσες με 0 ή 1. Άρα:

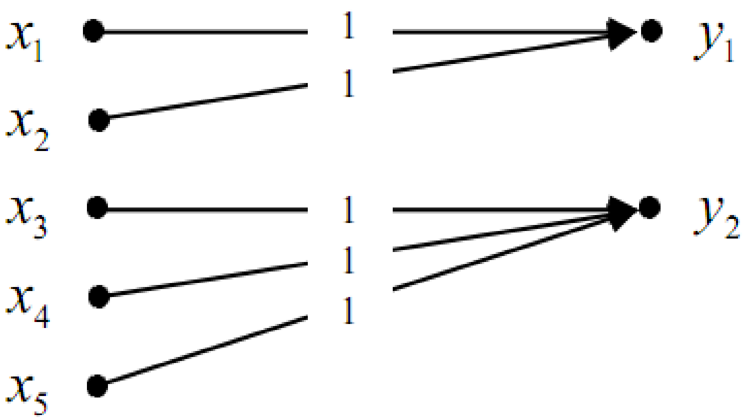
$$H(X/Y) = 0 \longrightarrow I(X;Y) = H(X)$$

- Άρα, η χωρητικότητα του διαύλου χωρίς απώλειες θα είναι:

$$C = \max_{P_X}\{I(X;Y)\} = \max_{P_X}\{H(X)\} = \log(N)$$

Καθοριστικός Δίαυλος

Διάγραμμα διαύλου:



Πίνακας διαύλου:

$$P_{Y|X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Κάθε σύμβολο εισόδου παράγει ένα μόνο σύμβολο εξόδου: οι πιθανότητες $p(y_j | x_i)$ είναι ίσες με 0 ή 1. Άρα:

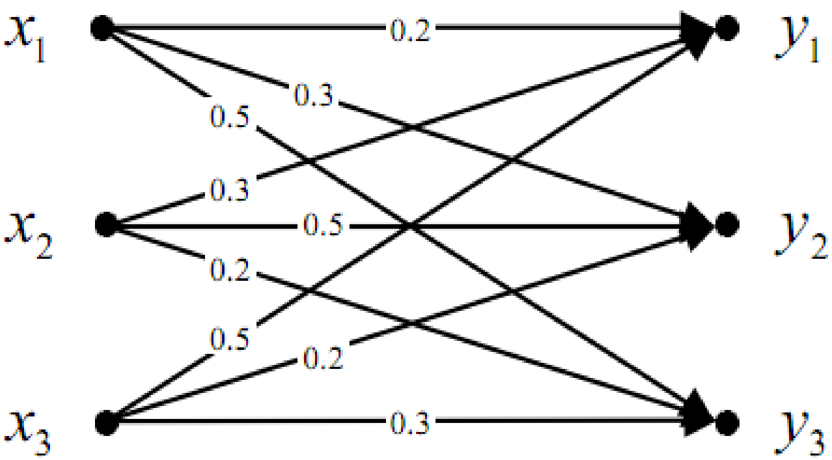
$$H(Y/X) = 0 \longrightarrow I(X;Y) = H(Y)$$

- Άρα, η χωρητικότητα του καθοριστικού διαύλου θα είναι:

$$C = \max_{P_X}\{I(X;Y)\} = \max_{P_X}\{H(Y)\} = \log(M)$$

Ομοιόμορφος Δίαυλος

Διάγραμμα διαύλου:



Πίνακας διαύλου:

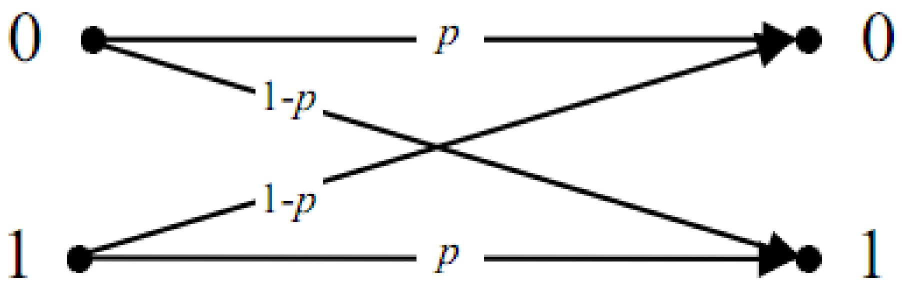
$$P_{Y|X} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

- Κάθε γραμμή και στήλη του πίνακα προκύπτει από αναδιάταξη των στοιχείων κάθε άλλης γραμμής και στήλης.
- Η χωρητικότητα του ομοιόμορφου διαύλου είναι:

$$C = \log(M) + \sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i)\log(p(y_j/x_i))$$

Συμμετρικός Δυαδικός Δίαυλος

Διάγραμμα διαύλου:



Πίνακας διαύλου:

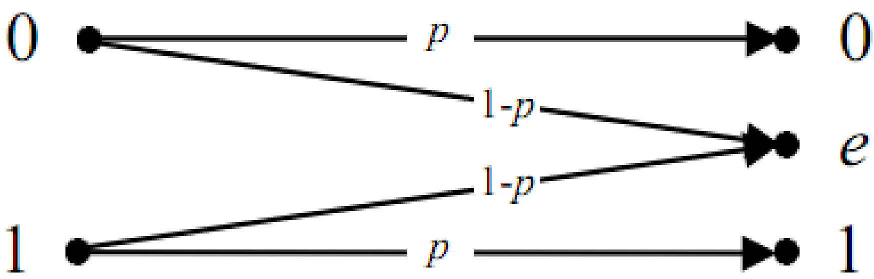
$$P_{Y|X} = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$$

• Η χωρητικότητα του συμμετρικού δυαδικού διαύλου (Binary Symmetric Channel – BSC) είναι:

$$C_{BSC} = 1 - H_b(p)$$

Δυαδικός Δίαυλος Εξάλειψης (Σ-Δίαυλος)

Διάγραμμα διαύλου:



Πίνακας διαύλου:

$$P_{Y|X} = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & 1-p & p \end{bmatrix}$$

- Η χωρητικότητα του δυαδικού διαύλου εξάλειψης (Binary Erasure Channel – BEC) είναι:

$$C_{BEC} = p$$

Εφαρμογές

- **Εφαρμογή Ι:** Αν η πιθανότητα σφάλματος κατά την μετάδοση δυαδικών συμβόλων είναι e=0.1 να υπολογιστεί η χωρητικότητα του συμμετρικού δυαδικού διαύλου και του δυαδικού διαύλου εξάλειψης.

Απ.: C_{BSC}~0.531 bits/symbol, C_{BEC}=0.9 bits/symbol

- **Εφαρμογή ΙΙ:** Θεωρούμε δίαυλο πληροφορίας του οποίου ο πίνακας είναι ίσος με:

$$P_{Y|X} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί η χωρητικότητα του. **Απ.:** C=~0.099 bits/symbol

- **Εφαρμογή ΙΙΙ:** Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του διαύλου πληροφορίας με πίνακα διαύλου:

$$P_{Y|X} = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1-p & p \end{bmatrix}$$

Απ.: C=2-H_b(p) bits/symbol

Εφαρμογές

- **Εφαρμογή IV:** Τα σύμβολα μιας δυαδικής πηγής πληροφορίας με αλφάβητο X={x_1, x_2} και κατανομή πιθανοτήτων P_x={0.75, 0.25} εισάγονται σε δίαυλο πληροφορίας με πίνακα:

$$P_{Y|X} = \begin{bmatrix} {}^{2}\!/_{3} & {}^{1}\!/_{3} \\ {}^{1}\!/_{3} & {}^{2}\!/_{3} \end{bmatrix}$$

α) Να υπολογιστεί η διαπληροφορία και η χωρητικότητα του διαύλου.

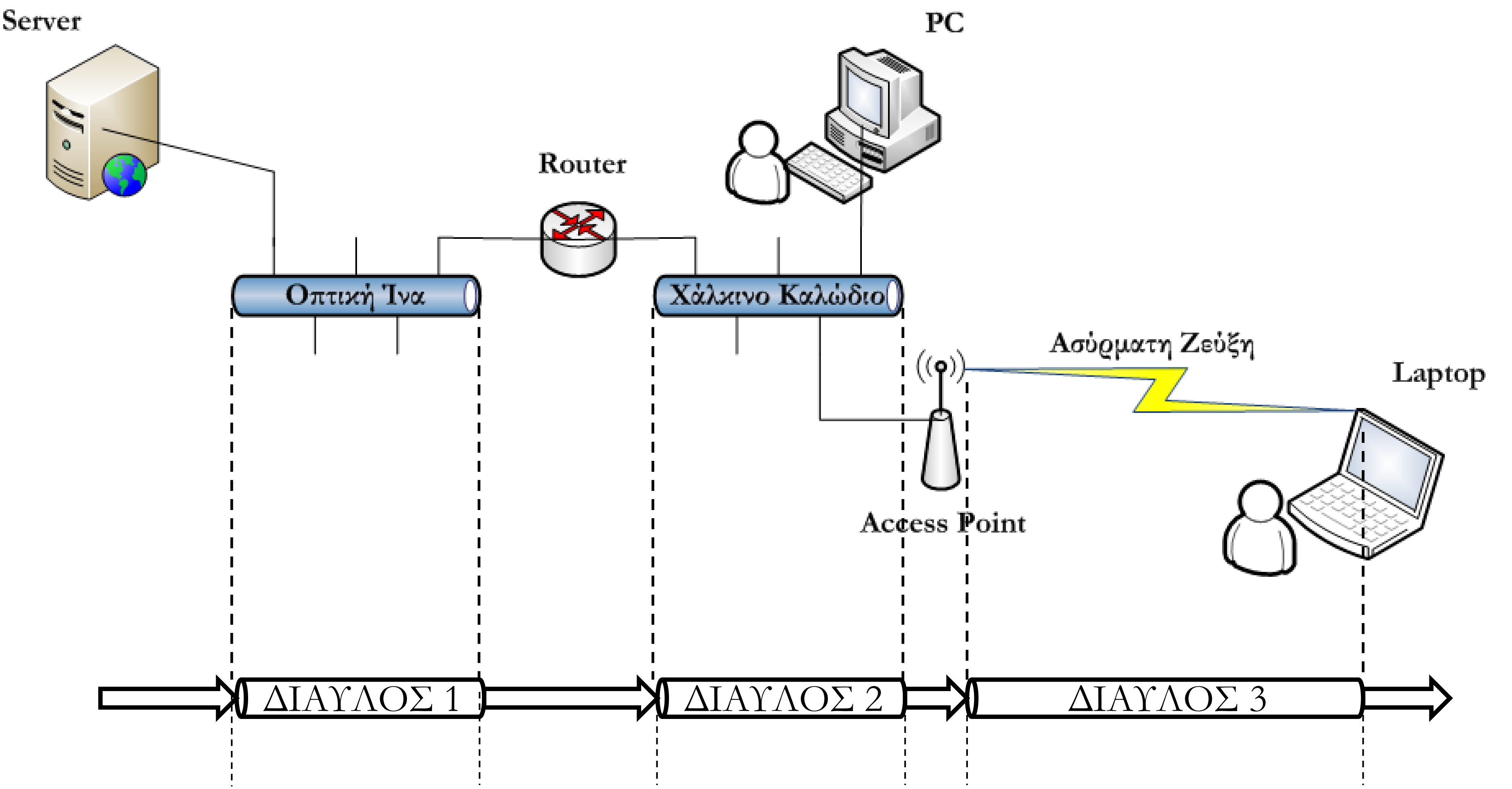
β) Να αιτιολογηθεί η διαφορά μεταξύ των τιμών των δύο μεγεθών.

Απ.: C~0.079 bits/symbol, I(X→Y)~0.064 bits/symbol

- **Εφαρμογή V:** Υποθέτουμε ότι δύο ισοπίθανα σύμβολα (0 και 1) μεταδίδονται με ρυθμό 1000 σύμβολα/δευτερόλεπτο. Κατά την διάρκεια της μετάδοσης ο θόρυβος εισάγει λάθη στην μετάδοση έτσι ώστε 1 στα 100 σύμβολα λαμβάνονται λανθασμένα (0 αντί για 1 ή 1 αντί για 0). Ποιός είναι ο ρυθμός μεταφοράς της πληροφορίας;

Απ.: R= 919 bits/sec

Αλυσίδα Διαύλων Πληροφορίας



Είσοδος 1 (X, P_X)

Έξοδος 1 – Είσοδος2 (Y, P_Y)

Έξοδος 2 – Είσοδος3 (Z, P_Z)

Έξοδος 3 (Ω, P_Ω)

$$\boldsymbol{P_X} \times \boldsymbol{P_{Y|X}} \times \boldsymbol{P_{Z|Y}} \times \boldsymbol{P_{\Omega|Z}} = \boldsymbol{P_\Omega}$$

Αλυσίδα Διαύλων Πληροφορίας

- Για μια αλυσίδα διαύλων ισχύει:

$$P_{Y_K} = P_{X_1} \cdot \prod_{k=1}^{K} P_{Y_k|X_k}$$

Η κατανομή πιθανοτήτων στην έξοδο της αλυσίδας διαύλων προκύπτει εάν πολλαπλασιάσουμε την κατανομή πιθανοτήτων της πηγής στη είσοδο της αλυσίδας με το γινόμενο των πινάκων διαύλου όλων των διαύλων.

- Άρα, ο ***Πίνακας Αλυσίδας Διαύλων Πληροφορίας*** θα δίνεται:

$$P_{Y_K|X_1} = \prod_{k=1}^{K} P_{Y_k|X_k}$$

- ***Σημαντική Παρατήρηση:*** Η χωρητικότητα μιας αλυσίδας διαύλων θα είναι πάντα μικρότερη από την χωρητικότητα κάθε στοιχειώδους διαύλου που μετέχει στην αλυσίδα.

Εφαρμογές

• **Εφαρμογή Ι:** Να υπολογιστούν οι χωρητικότητες των διαύλων πληροφορίας που περιγράφονται από τους παρακάτω πίνακες διαύλων:

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \end{bmatrix} \qquad P^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Απ.: C_1=0.75 bits/symbol **Απ.:** C_2=1 bit/symbol **Απ.:** C_3=0.029 bits/symbol

Εάν οι τρείς δίαυλοι συνδεθούν σε σειρά με πρώτο τον $P^{(1)}$ και τελευταίο τον $P^{(3)}$ να βρεθεί ο Πίνακας Διαύλου της αλυσίδας διαύλων.

Απ.: $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.45 & 0.55 \end{bmatrix}$

Τεχνική Muroga

- Ο υπολογισμός της χωρητικότητας ενός διαύλου (εκτός των χαρακτηριστικών διαύλων που εξετάσαμε) αποτελεί, εν γένει, ένα δύσκολο πρόβλημα.

- Για τον υπολογισμό της χωρητικότητας ενός διαύλου ή μιας αλυσίδας διαύλων μπορεί να εφαρμοστεί η **Τεχνική Muroga** υπό τις εξής προϋποθέσεις:

    - Γνωστός ο Πίνακας Διαύλου.

    - Τα αλφάβητα των πηγών στην είσοδο-έξοδο είναι ισάριθμα (**N=M**).

Τεχνική Muroga

Τετραγωνικός Πίνακας Διαύλου **(N=M):**

$$P_{Y|X}=\begin{bmatrix} p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) & \dots & p(y_M|x_1) \\ p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) & \dots & p(y_M|x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(y_1|x_N) & p(y_2|x_N) & \dots & p(y_M|x_N) \end{bmatrix}$$

Αποτελείται από δύο βήματα:

Βήμα 1ο: Σύνθεση ενός συστήματος N γραμμικών εξισώσεων:

$$p(y_1|x_1)A_1+p(y_2|x_1)A_2+\dots+p(y_N|x_1)A_N=\sum_{j=1}^{N}p(y_j|x_1)\log\left[p(y_j|x_1)\right]$$

$$p(y_1|x_2)A_1+p(y_2|x_2)A_2+\dots+p(y_N|x_2)A_N=\sum_{j=1}^{N}p(y_j|x_2)\log\left[p(y_j|x_2)\right]$$

....

$$p(y_1|x_N)A_1+p(y_2|x_N)A_2+\dots+p(y_N|x_N)A_N=\sum_{j=1}^{N}p(y_j|x_N)\log\left[p(y_j|x_N)\right]$$

Επιλύουμε με αγνώστους τα A_1, $A_2 \dots A_N$.

Τεχνική Muroga

Βήμα 2ο: Υπολογισμός της χωρητικότητας με βάση τον παρακάτω τύπο:

$$C = \log\left(\sum_{i=1}^{N} 2^{A_i}\right)$$

- **Παρατηρήσεις**
  - Η τεχνική αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά για τον υπολογισμό της χωρητικότητας των χαρακτηριστικών διαύλων (ιδανικού, ομοιόμορφου, δυαδικού συμμετρικού)
  - οι πιθανότητες $p(y_j)$ στην έξοδο του διαύλου που οδηγούν στην μέγιστη διαπληροφορία $I(X \rightarrow Y)$ δίνονται από:

$$p(y_j) = 2^{A_j - C}, 1 \leq j \leq N$$

  - Και οι αντίστοιχες πιθανότητες των συμβόλων εισόδου προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος εξισώσεων:

$$P_Y = P_X \cdot P_{Y|X}$$

Τεχνική Muroga

• **Εφαρμογή Ι:** Να υπολογιστούν οι χωρητικότητες των διαύλων πληροφορίας που περιγράφονται από τους παρακάτω πίνακες διαύλων:

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \end{bmatrix} \qquad P^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Απ.: C_1=0.75 bits/symbol **Απ.:** C_2=1 bit/symbol **Απ.:** C_3=0.029 bits/symbol

Εάν οι τρείς δίαυλοι συνδεθούν σε σειρά με πρώτο τον $P^{(1)}$ και τελευταίο τον $P^{(3)}$ να βρεθεί ο Πίνακας Διαύλου της αλυσίδας διαύλων.

Απ.: $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.45 & 0.55 \end{bmatrix}$

Να βρεθεί η χωρητικότητα της αλυσίδας διαύλων.

Απ.: A_1=-0.912, A_2=-1.058

Απ.: C=0.0163 bits/symbol

Ασκήσεις Επανάληψης

• **Εφαρμογή I** (Εξεταστική 2009)**:** Έστω ένας δίαυλος με πίνακα διαύλου:

$$P_{\mathrm{Y|X}} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε την $p_x(0)$ (τη πιθανότητα να έχουμε 0 στην είσοδο) εάν $p_y(1)=0.36$ (η πιθανότητα να έχουμε 1 στην έξοδο). **Απ.:** $p_x(1)=0.1$

• **Εφαρμογή II** (Εξεταστική 2009): Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα ενός διαύλου για τον οποίο δίνεται ο πίνακας συνδετικών πιθανοτήτων των συμβόλων εισόδου εξόδου, που είναι:

$$P_{\mathrm{XY}} = \begin{bmatrix} 0.24 & 0.36 \\ 0.24 & 0.16 \end{bmatrix}$$

(Προσοχή, ο παραπάνω πίνακας δεν είναι ο πίνακας διαύλου).

Απ.: C~0.029 bits/symbol

Ασκήσεις Επανάληψης

• **Εφαρμογή III** (Εξεταστική 2010)**:** Έστω ένας δίαυλος με χωρητικότητα C και I(X;Y) η διαπληροφορία εισόδου-εξόδου. Τι ισχύει από τα παρακάτω και σε ποιες περιπτώσεις:

1. C > I(X;Y)
2. C = I(X;Y)
3. C < I(X;Y)

Απ.: Το 3 ποτέ, το 1 και 2 μερικές φορές

(π.χ. Το 1 δεν ισχύει ποτέ, το 2 ισχύει μερικές φορές κλπ.)

• **Εφαρμογή IV** (Εξεταστική 2010): Έχουμε μια δυαδική πηγή η οποία εκπέμπει σύμβολα 0 και 1 με πιθανότητες 0.75 και 0.25 αντίστοιχα. Η πηγή είναι προσαρμοσμένη σε δίαυλο με πίνακα διαύλου:

$$P_{\mathrm{Y|X}} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε τις πιθανότητες εμφάνισης του 0 και 1 στην έξοδο.

Απ.: $p_y0=0.6875$, $p_y1=0.3125$

Ασκήσεις Επανάληψης

• **Εφαρμογή V** (Εξεταστική 2009)**:** Για έναν δίαυλο δίνονται ο πίνακας διαύλου και ο πίνακας συνδετικών πιθανοτήτων των συμβόλων εισόδου εξόδου:

$$P_{\mathrm{Y|X}} = \begin{bmatrix} 0.5 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & 0.5 \end{bmatrix} \qquad P_{\mathrm{XY}} = \begin{bmatrix} 0.15 & \ldots & 0.15 \\ \alpha & 0.15 & \alpha \\ 0.15 & \ldots & 0.15 \end{bmatrix}$$

Α) Να υπολογιστούν οι τιμές (τα κενά) των παραπάνω πινάκων (και το *a*).

Β) Να υπολογιστεί η εντροπία εισόδου και εξόδου.

Γ) Να υπολογιστεί η εντροπία διαύλου, θορύβου και η διαπληροφορία εισόδου-εξόδου.

Α) $$P_{\mathrm{Y|X}} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.3125 & 0.375 & 0.3125 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad P_{\mathrm{XY}} = \begin{bmatrix} 0.15 & 0 & 0.15 \\ 0.125 & 0.15 & 0.125 \\ 0.15 & 0 & 0.15 \end{bmatrix}$$

Β) H(X)=1.5708 bits/symbol, H(Y)=1.4595 bits/symbol

Γ) H(X|Y)=1.3434 bits/symbol, H(Y|X)=1.2321 bits/symbol, I(X;Y) = 0.2274 bits/symbol

Ασκήσεις Επανάληψης

- **Εφαρμογή VI** (Εξεταστική 2007): Να υπολογιστεί η χωρητικότητα διαύλου πληροφορίας με πίνακα διαύλου:

$$\begin{bmatrix} p & 0 & 1-p & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & 1-q \\ 0 & 1-q & 0 & q \end{bmatrix}$$

Απ.: $C=1+\log[2^{-Hb(p)}+2^{-Hb(q)}]$

- **Εφαρμογή VII**: Να υπολογιστεί η χωρητικότητα διαύλου πληροφορίας με πίνακα διαύλου:

$$P_{Y|X} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}$$

Απ.: $A_1=-0.6959$, $A_2=-5.3329$, $A_3=-1.3136$
$C=0.0626$ bits/symbol