

## 1. Έλεγχος για την μονοσημαντικότητα (unique decipherability) ενός κώδικα

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε μια μέθοδο με την οποία μπορούμε να ελέγξουμε εάν ένας κώδικας είναι *μονοσήμαντος* ή όχι. Θα πρέπει να υπενθυμίσουμε σε αυτό το σημείο ότι ένας κώδικας που είναι *στιγμαία αποκωδικοποιήσιμος* είναι αυτομάτως και *μονοσήμαντος*. Επομένως, η τεχνική που ακολουθεί μπορεί να εφαρμοστεί για τον έλεγχο της μονοσημαντικότητας ενός κώδικα που δεν είναι *στιγμαία αποκωδικοποιήσιμος*.

Η τεχνική αυτή προέκυψε από τους *Sardinas* και *Patterson* [1] και περιγράφεται εξαιρετικά από τον *Asb* [2]. Η μέθοδος εφαρμόζεται για τον έλεγχο της μονοσημαντικότητας ενός κώδικα που είναι μεταβλητού μήκους.

Η κεντρική ιδέα της τεχνικής είναι η κατασκευή μιας ακολουθίας από σύνολα  $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$  και ο έλεγχος των στοιχείων που περιέχονται σε αυτά για τον εντοπισμό όμοιων ακολουθιών κωδικών συμβόλων. Ας εξετάσουμε βήμα-βήμα πώς κατασκευάζεται το κάθε σύνολο και πώς ακριβώς γίνονται οι έλεγχοι των στοιχείων με την βοήθεια ενός παραδείγματος.

### Παράδειγμα 1.1

Έστω ότι επιθυμούμε να ελέγξουμε ως προς τη μονοσημαντικότητα τον παρακάτω κώδικα. Παρατηρείστε ότι ο κώδικας είναι μεταβλητού μήκους και ότι είναι ευκρινής. Επίσης, δεν είναι *στιγμαία αποκωδικοποιήσιμος* γιατί δεν ισχύει η προθεματική ιδιότητα (η κωδική λέξη «a» είναι πρόθεμα των λέξεων «ad» και «abb»). Επομένως, δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι για το εάν είναι *μονοσήμαντος* ή όχι.

Σύμβολο Πηγής	Κωδική Λέξη
$x_1$	a
$x_2$	c
$x_3$	ad
$x_4$	abb
$x_5$	bad
$x_6$	deb
$x_7$	bbcde

Το πρώτο σύνολο ( $S_0$ ) περιέχει ως στοιχεία όλες τις κωδικές λέξεις του κώδικα υπό εξέταση. Το  $S_0$ , δηλαδή, θα περιέχει τα εξής στοιχεία {a,c,ad,abb,bad,deb,bbcde}.

Κατόπιν, για να κατασκευαστεί το  $S_1$  συγκρίνουμε ανά ζεύγη τα στοιχεία του  $S_0$  και ελέγχουμε εάν μία κωδική λέξη  $W_i$  είναι πρόθεμα μίας άλλης  $W_j$  (εάν ισχύει δηλαδή  $W_j = W_i A$ ). Εάν ο παραπάνω έλεγχος ισχύει τότε το επίθεμα  $A$  τοποθετείται ως στοιχείο στο σύνολο  $S_1$ . Δηλαδή, για το παραπάνω παράδειγμα θα έχουμε  $S_1 = \{d, bb\}$  (η κωδική λέξη «a» είναι πρόθεμα των λέξεων «ad» και «abb»). Τα επίθεματα είναι τα «d» και «bb»).

Σε αυτό το σημείο εκτελούμε τον εξής έλεγχο: υπάρχει κάποιο στοιχείο των συνόλων  $S_1$  και  $S_0$  που είναι ίδια; Εάν η απάντηση είναι θετική τότε ο κώδικας *δεν είναι μονοσήμαντος*. Ειδικά, η διαδικασία προχωρά όπως παρακάτω.

Το κάθε επόμενο σύνολο  $S_n$  ( $n > 1$ ) κατασκευάζεται συγκρίνοντας τα σύνολα  $S_0$  και  $S_{n-1}$ . Εάν μία κωδική λέξη η οποία ανήκει στο  $S_0$  είναι πρόθεμα ενός στοιχείου που ανήκει στο  $S_{n-1}$  τότε το επίθεμα τοποθετείται ως στοιχείο στο  $S_n$ . Η ίδια διαδικασία εκτελείται και αντίστροφα: εάν ένα στοιχείο του  $S_{n-1}$  είναι πρόθεμα μιας κωδικής λέξης που ανήκει στο  $S_0$  τότε το επίθεμα που προκύπτει εισάγεται επίσης ως στοιχείο στο  $S_n$ .

Αφού κατασκευαστεί το  $S_n$ , υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

1. Εάν κάποιο από τα στοιχεία του συνόλου  $S_n$  είναι ίδιο με κάποιο από τα στοιχεία του συνόλου  $S_0$  η διαδικασία διακόπτεται και ο κώδικας *δεν είναι μονοσήμαντος*.
2. Εάν το προκύπτον σύνολο είναι ίσο με κάποιο από τα προηγούμενα (περιέχει δηλαδή τα ίδια ακριβώς στοιχεία) εκτός του συνόλου  $S_0$  τότε η διαδικασία σταματά και ο κώδικας *είναι μονοσήμαντος*.
3. Εάν δεν υπάρχει επίθεμα που μπορεί να εισαχθεί ως στοιχείο στο νέο σύνολο, τότε το  $S_n$  είναι το κενό σύνολο, η διαδικασία σταματά και ο κώδικας *είναι μονοσήμαντος*.
4. Εάν δεν ισχύει τίποτε από τα παραπάνω η διαδικασία συνεχίζεται με την κατασκευή του συνόλου  $S_{n+1}$ .

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα μας και επιχειρώντας να κατασκευάσουμε το σύνολο  $S_2$  θα συγκρίνουμε αρχικά τα στοιχεία του  $S_0$  με τα στοιχεία του  $S_1$  και θα αναρωτηθούμε εάν κάποιο από αυτά είναι πρόθεμα ενός άλλου που ανήκει στο έτερο σύνολο. Στο παράδειγμα μας, κανένα από τα στοιχεία του  $S_0$  δεν είναι πρόθεμα των στοιχείων του  $S_1$ . Όμως, παρατηρώντας το  $S_1$  εντοπίζουμε ότι και τα δύο στοιχεία του είναι προθέματα κάποιων από τα στοιχεία του  $S_0$ . Πιο συγκεκριμένα, το «d» του  $S_1$  είναι πρόθεμα

του «deb» του  $S_0$  και επομένως το επίθεμα «eb» τοποθετείται ως στοιχείο στο  $S_2$ . Επίσης, το «bb» του  $S_1$  είναι πρόθεμα του «bbcde» του  $S_0$  και επομένως το επίθεμα «cde» τοποθετείται ως στοιχείο στο  $S_2$ . Έτσι,  $S_2 = \{eb, cde\}$ . Για το νέο σύνολο εκτελούμε τους ελέγχους 1 έως 4 που αναφέρθηκαν προωτέρω. Συγκεκριμένα για το  $S_2$  ισχύει η 4<sup>η</sup> περίπτωση και η διαδικασία συνεχίζεται. Παρακάτω φαίνονται όλα τα διαδοχικά σύνολα που κατασκευάζονται με την παραπάνω διαδικασία.

$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$
a	d	eb	de	b	<b>ad</b>
c	bb	cde			bcde
<b>ad</b>					
abb					
bad					
deb					
bbcde					

Κατά την κατασκευή του 5<sup>ου</sup> συνόλου παρατηρούμε ότι το στοιχείο «ad» περιέχεται και στο αρχικό σύνολο  $S_0$ . Ισχύει δηλαδή η 1<sup>η</sup> περίπτωση. Η διαδικασία σταματά και ο κώδικας δεν είναι μονοσήμαντος.

## 2. Βιβλιογραφία

- [1] Sardinas, A. A. and Patterson G. W., “A Necessary and Sufficient Condition for Unique Decomposition of Coded Messages”, IRE Convention Record, Part 8, 104-108, 1953.
- [2] Ash R. B., “Information Theory”, Dover Publications, New York, 1990.