ΑΥΤΟΜΑΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΤΟ SCILAB: ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΠΑΚΕΤΟΥ ΓΙΑ ΕΥΡΩΣΤΟ ΕΛΕΓΧΟ.

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΣΠΟΥΔΑΣΤΡΙΑΣ: ΕΥΑΓΓΕΛΙΑ ΔΑΠΚΑ
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΔΡ ΣΤΑΥΡΟΣ ΒΟΛΟΓΙΑΝΝΙΔΗΣ

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΣΕΡΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Πολλά συστήματα αυτομάτου ελέγχου βγαίνουν από μοντελοποίηση. Όλα τα μοντέλα περιέχουν παραμέτρους που από την φύση τους αλλάζουν έτσι εμφανίστηκε η ανάγκη να κάνουμε έλεγχο ευστάθειας σε μοντέλα που οι παράμετροι τους αλλάζουν. Η μελέτη της ευστάθειας των πολυωνύμων είναι βασική για την ανάλυση πολλών προβλημάτων αυτόματου ελέγχου. Η ευστάθεια ενός συστήματος καθορίζεται από τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ή ισοδύναμα του παρανομαστή της συνάρτησης μεταφοράς. Αν οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι γνωστοί τότε η ευστάθεια του μπορεί εύκολα να ελεγχθεί με τη βοήθεια διαφόρων κριτηρίων και μεθόδων όπως αυτά των Routh, Hurwitz και πολλών άλλων. Η δυσκολία παρουσιάζεται όταν δεν γνωρίζουμε με ακρίβεια τους συντελεστές δηλαδή όταν οι συντελεστές είναι σε διάστημα. Η πτυχιακή αυτή έχει σαν στόχο να παρουσιάσει τρόπους με τους οποίους θα επιλύονται τέτοιου είδους δυσκολίες .

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1ο

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΒΕΒΑΙΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ.

Τα εύρωστα προβλήματα αναφέρονται σε συστήματα τα οποία οι περιγραφές τους περιέχουν συναρτήσεις με αβέβαιες παραμέτρους. Στα περισσότερα βιβλία μια συνάρτηση μεταφοράς $P(s)$ ή ένα πολυώνυμο $p(s)$ έχουν την μεταβλητή s ως ένα μόνο όρισμα. Εδώ ωστόσο χρησιμοποιούμε δύο ορίσματα στις συναρτήσεις και τις γράφουμε με την μορφή $P(s,q)$. Γράφοντας $P(s,q)$ δείχνουμε την εξάρτηση της συνάρτησης μεταφοράς από το διάνυσμα της αβέβαιης παραμέτρου q.

Χρησιμοποιούμε την μεταβλητή q για να ορίσουμε το διάνυσμα της πραγματικής αβέβαιης παραμέτρου q_i. Συχνά αναφέρουμε την μεταβλητή q ως αβεβαιότητα. Αν η αβεβαιότητα είναι λ-διαστάσεων είναι πιο εύκολο να περιγράψουμε το q γράφοντας ως $q=(q_1,q_2,q_3\ldots\ldots q_\lambda)$ σε αντίθετες με περιπτώσεις το q ορίζεται ως διάνυσμα στήλης.

Αν ο αριθμητής και ο παρανομαστής μιας συνάρτησης μεταφοράς είναι πολυώνυμα με αβεβαιότητα, τότε η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως:

$$P(s,q)=\frac{N(s,q)}{D(s,q)} \quad (1.1.1)$$

όπου τα πολυώνυμα $N(s,q)$ και $D(s,q)$ εξαρτώνται από την μεταβλητή q. Αντίστοιχα και τα πολυώνυμα $N(s,q)$ και $D(s,q)$ μπορούν να οριστούν με βάση την μεταβλητή q και να έχουν την μορφή:

$$N(s,q)=\sum_{i=0}^{m} a_i(q)s^i \quad (1.1.2)$$

και

$$D(s,q)=\sum_{i=0}^{n} b_i(q)s^i \quad (1.1.3)$$

Αν ένα γραμμικό σύστημα περιγράφεται στο χώρο των καταστάσεων ως $x(t) = Ax(t)$, μπορούμε να δείξουμε την εξάρτηση που έχει από το q γράφοντας το ως

$$x(t) = A(q)x(t) .$$

Με την λέξη αβεβαιότητα περιγράφονται όλες οι μεταβλητές οι οποίες εξαρτώνται από την μεταβλητή q. Μπορούμε να ορίσουμε μια αβέβαιη συνάρτηση μεταφοράς γράφοντας την ως $P(s,q)$, ένα αβέβαιο πολυώνυμο ως $N(s,q)$ και τέλος ένα αβέβαιο πίνακα ως $A(q)$. Αν ο αριθμητής και ο παρονομαστής μιας συνάρτησης μεταφοράς εξαρτούνται από διαφορετικές αβέβαιες μεταβλητές, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και μια δεύτερη μεταβλητή για να περιγράψουμε την αβεβαιότητα. Σε αυτές τις περιπτώσεις η σχέση (1.1.1) γράφετε ως

$$P(s,q,r) = \frac{N(s,q)}{D(s,r)} \quad \textit{(1.1.4)}$$

όπου $N(s,q)$ και $D(s,r)$ είναι αβέβαια πολυώνυμα.

Όταν οι αβέβαιες παραμέτρους q και r παίρνουν συγκεκριμένες τιμές, θα γράφονται q_0 και r_0. Όταν ένα αβέβαιο πολυώνυμο έχει συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων αβεβαιότητας θα γράφεται ως $p(s,q) = q_0 + q_1 s + q_2 s^2$ όπου το $q \in R^3$, ενώ η αντίστοιχη αβέβαιη συνάρτηση μεταφοράς ως

$$P(s,q,r) = \frac{\sum_{i=0}^{m} q_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} r_i s^i} \quad \textit{(1.1.5)}$$

όπου το $q \in R^{m+1}$ και το $r \in R^{n+1}$.

1.2 ΑΒΕΒΑΙΑ ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΝΟΡΜΕΣ.

Σε πολλά προβλήματα που έχουν να κάνουν με την ευστάθεια συχνά χρησιμοποιούμε το όρο $q \in Q$ για να δηλώσουμε το όριο αβεβαιότητας των διανυσμάτων με τις αβέβαιες παραμέτρους q. Οι δυο πιο σημαντικές νόρμες που χρησιμοποιούμε στα αβέβαια συστήματα είναι η μέγιστη νόρμα ℓ^∞ και η ευκλείδεια νόρμα ℓ^2. Η μέγιστη νόρμα (max norm) δίνεται από την σχέση

$$\|q\|_\infty = \max_i |q_i| \quad \textit{(1.2.1)}$$

ενώ η ευκλείδεια νόρμα (Euclidian norm) δίνεται από την σχέση

$$\|q\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\ell} q_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.2.2)$$

Με ℓ^1 ορίζουμε την νόρμα διαμάντι (diamond norm) η οποία δίνεται από την σχέση

$$\|q\|_1 = \sum_{i=1}^{\ell} |q_i| \quad (1.2.3).$$

Σε μερικές περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και βάρη αντί για νόρμες . Για παράδειγμα έστω ότι έχουμε τα βάρη $w_1, w_2, \ldots\ldots, w_\ell$ τα οποία είναι θετικά, με βάση την ευκλείδεια νόρμα προκύπτει η σχέση

$$\sum_{i=1}^{\ell} w_i^2 q_i^2 \leq 1 \quad (1.2.4)$$

οπού μπορεί να απεικονιστεί γραμμικά σαν έλλειψη .

1.3 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΩΝ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ.

Μια αβέβαιη συνάρτηση μαζί με το όριο αβεβαιότητας ορίζουν μια οικογένεια συναρτήσεων. Έστω ότι έχουμε το αβέβαιο πολυώνυμο $P(s,q)$ με όριο αβεβαιότητας Q τότε η οικογένεια του πολυωνύμου ορίζεται ως $P = \{p(.,q) : q \in Q\}$. Αντίστοιχα αν έχουμε μια συνάρτηση μεταφοράς, που δίνεται από την σχέση $P(s,q) = {N(s,q)}\big/{D(s,q)}$ όπου $N(s,q)$ και $D(s,q)$ είναι πολυώνυμα τότε ορίζουμε τις σχέσεις $N = \{N(.,q) : q \in Q\}$ και $D = \{D(.,q) : q \in Q\}$ για να δηλώσουμε τις οικογένειες του $N(s,q)$ και $D(s,q)$ αντίστοιχα. Αν το $A(q)$ είναι πίνακας ο οποίος εξαρτάται από την μεταβλητή q η οικογένεια του πίνακα δίνεται από την σχέση $A = \{A(q) : q \in Q\}$.

Είναι σημαντικό να γίνει διαχωρισμός μεταξύ των αβέβαιων μεταβλητών και των οικογενειών. Το αβέβαιο πολυώνυμο $p(s,q)$ και η οικογένεια πολυωνύμων $P = \{p(.,q) : q \in Q\}$ είναι διαφορετικές έννοιες . Το αβέβαιο πολυώνυμο $p(s,q)$ είναι συνδυασμός του αβέβαιου ορίου Q και της οικογένειας πολυωνύμων P.

Κεφάλαιο 2ο

ΕΥΡΩΣΤΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΜΕ ΜΙΑ ΜΟΝΟ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τα προβλήματα που προκύπτουν προσπαθώντας να ορίσουμε την έννοια της εύρωστης ευστάθειας. Θα εισάγουμε κάποιες βασικές έννοιες οι οποίες αφορούν οικογένειες πολυώνυμων ή πινάκων οι οποίες περιγράφονται από μία μόνο αβέβαιη παράμετρο καθώς και θα παρουσιαστούν αρκετά παραδείγματα.

2.1 ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΚΑΙ ΕΥΡΩΣΤΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ.

Πολλές οικογένειες πολυωνύμων αλλά και πινάκων περιγράφονται με μία μόνο παράμετρο. Οι λόγοι για τους οποίους γίνεται από είναι τρεις . Πρώτον για λόγους κατανόησης, καθώς η χρήση μιας μόνο παραμέτρου διευκολύνει κάποιον να κατανοήσει πιο γρήγορα τις πράξεις που γίνονται και τον τρόπο με τον οποίο προκύπτουν τα αποτελέσματα. Δεύτερον η χρήση μιας μόνο παραμέτρου παράγει πιο έγκυρα αποτελέσματα σε σχέση με αυτά των δύο ή και περισσότερων παραμέτρων . Τέλος υπάρχουν περισσότερα θεωρητικά αποτελέσματα για την εύρωστη ευστάθεια πολυωνύμων με μια αβέβαια παράμετρο. Αρχίζουμε με κάποιους βασικούς ορισμούς.

Πολυώνυμο (Polynomial): Μια συνάρτηση $p: R \to R$ ονομάζεται πολυώνυμο ή πολυωνυμική συνάρτηση αν υπάρχει πεπερασμένη ακολουθία $(a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n) \in R^{n+1}$ τέτοια ώστε να ισχύει $p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k, x \in R$. Η ταυτότητα $p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ ονομάζεται αναπαράσταση του πολυωνύμου p και τα $a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n$ συντελεστές του πολυωνύμου. Η αναπαράσταση του πολυωνύμου είναι μοναδική.

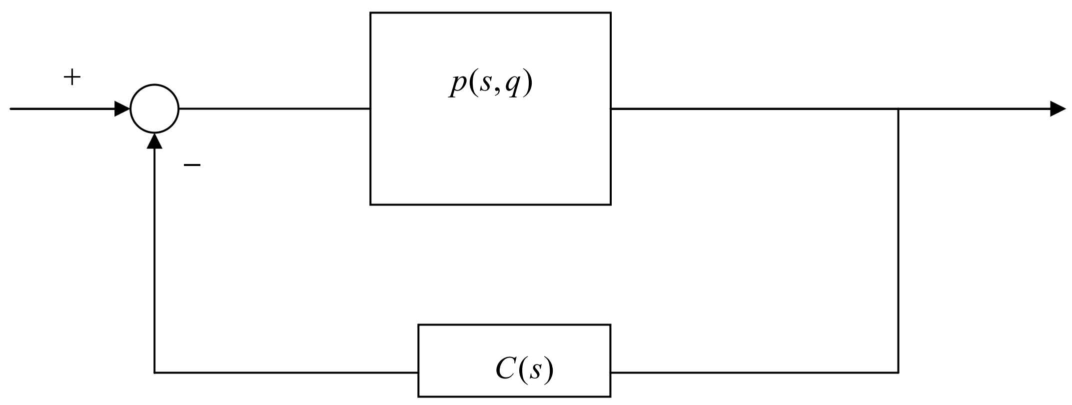
Ευστάθεια (Stability): Ένα πολυώνυμο $p(s)$ είναι ευσταθές όταν όλες οι ρίζες του βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Εύρωστη Ευστάθεια (Robust Stability): Μια οικογένεια πολυωνύμων $P = \{p(.,q) : q \in Q\}$ είναι εύρωστα ευσταθής εάν για όλα τα $q \in Q$ οι ρίζες των $p(s,q)$ βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Στα παρακάτω παραδείγματα θα εξετάσουμε την ευστάθεια μιας οικογένειας πολυωνύμων :

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Ευστάθεια πολυωνύμων)

Έχουμε την συναρτήσεων μεταφορών $P(s,q) = \dfrac{1}{(s-q)}$ όπου το $|q| \le 2$. Όταν το σύστημα ισορροπεί συνδέεται με μία ανάδραση $C(s) = 1$ και αποκτά την εξής μορφή $H(s,q) = \dfrac{1}{p(s,q)}$ όπου $p(s,q) = s + 1 - q$.



Από τον παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς $H(s,q)$ προκύπτει ότι έχει μία μονή ρίζα την $s_1(q) = -1 + q$. Στο συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε είναι ότι η οικογένεια $H(s,q)$ δεν είναι εύρωστα ευσταθής επειδή για $q \ge 1$ η ρίζα $s_1(q)$ βρίσκεται στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο. Επομένως για τα όρια αβεβαιότητας που είναι $|q| \le r$, εύκολα μπορούμε να πούμε ότι η οικογένεια $H(s,q)$ είναι εύρωστα ευσταθής αν και μόνο αν ισχύει $r < 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Ευστάθεια πολυωνύμων)

Έχουμε το αβέβαιο πολυώνυμο $p(s,q) = s^2 + (2-q)s + (3-q)$ του οποίου οι συντελεστές είναι θετικοί με $q \in Q = [0,4]$. Χρησιμοποιώντας την διακρίνουσα βρίσκουμε τις εξής δύο ρίζες:

$$s_{1,2} = \{(-1+\frac{q}{2}) \pm j(\sqrt{8-\frac{q^2}{2}}) \quad \text{αν } 0 \le q \le 2\sqrt{2}$$

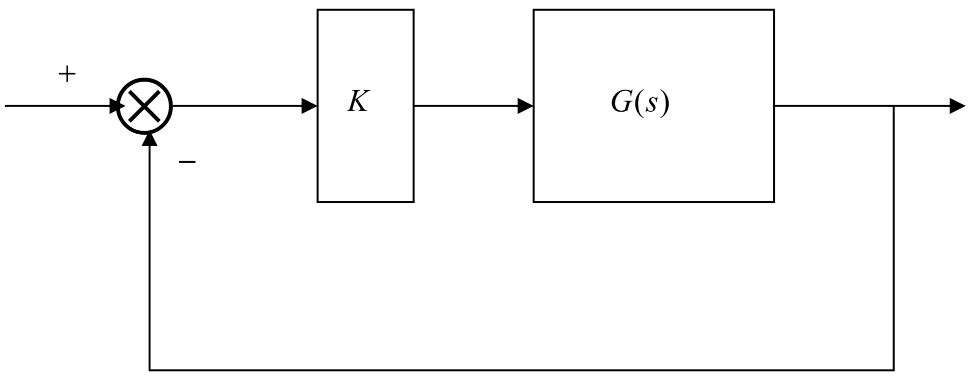
$$s_{1,2} = \{(-1+\frac{q}{2}) \pm j(\sqrt{q^2-\frac{8}{2}}) \quad \text{αν } 2\sqrt{2} \le q \le 4$$

Άρα το πολυώνυμο $p(s,q)$ είναι εύρωστα ευσταθές όταν $q \in Q^{'} = (-\infty, 2]$. Στο συμπέρασμα το οποίο καταλήγουμε είναι ότι η οικογένεια πολυωνύμων $P = \{p(.,q) : q \in Q\}$ δεν είναι εύρωστα ευσταθή.

2.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΡΙΖΩΝ.

Το $p(s,q)$ είναι ένα αβέβαιο πολυώνυμο το οποίο έχει μία μόνο αβέβαιη παράμετρο η οποία εισάγεται γραμμικά στους συντελεστές. Ένας γραφικός τρόπος για να ελέγξουμε την εύρωστη ευστάθεια σε ένα σύστημα είναι ο γεωμετρικός τόπος ριζών .

Έστω το παρακάτω σύστημα ανάδρασης



όπου $G(s) = N(s)/D(s)$ και K είναι συναρτήσεις μεταφοράς δύο συστημάτων. Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος θα είναι

$$T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)K}=\frac{KN(s)}{D(s)+N(s)K}$$

όπου K είναι ο συντελεστής κέρδους.

Οι ρίζες της εξίσωσης $D(s)+N(s)K=0$ μας δίνει τους πόλους του συστήματος .Η θέση των πόλων στο μιγαδικό επίπεδο αλλάζει καθώς μεταβάλλουμε το K. Αν θέσουμε K πολύ κοντά στο 0 τότε οι πόλοι του κλειστού συστήματος θα είναι πολύ κοντά με τους πόλους του ανοιχτού συστήματος G(s). Όταν το K λαμβάνει πολύ μεγάλες τιμές τότε οι πόλοι του κλειστού συστήματος τείνουν να συμπέσουν με τα μηδενικά του ανοιχτού συστήματος όταν αυτά είναι αρκετά, αλλιώς πάνε στο άπειρο. Επομένως το K ανήκει στο διάστημα $K\in[0,1)$. Το γράφημα που δείχνει πως μεταβάλλονται οι πόλοι του κλειστού συστήματος στο μιγαδικό επίπεδο όταν αυξάνεται το K ονομάζεται γεωμετρικός τόπος ριζών.

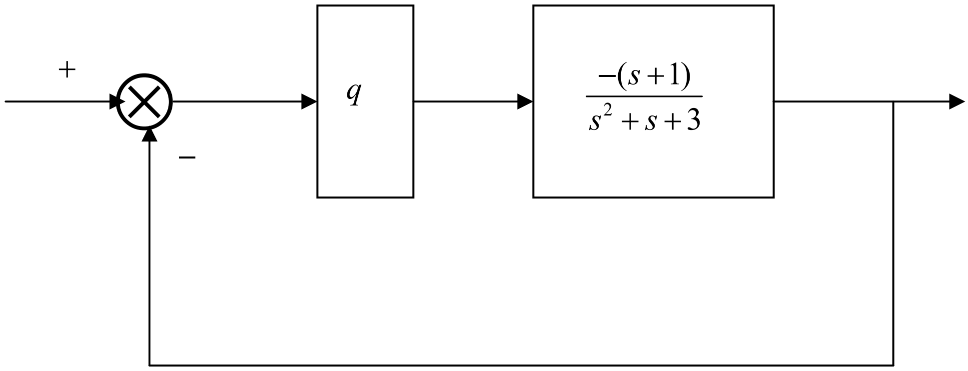
Γεωμετρικός τόπος (Root Locus): Είναι μια τροχιά σημείων στο μιγαδικό επίπεδο, πάνω στην οποία κινούνται οι ρίζες ενός συστήματος καθώς μεταβάλλεται κάποια συγκεκριμένη παράμετρος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Γεωμετρικός τόπος)

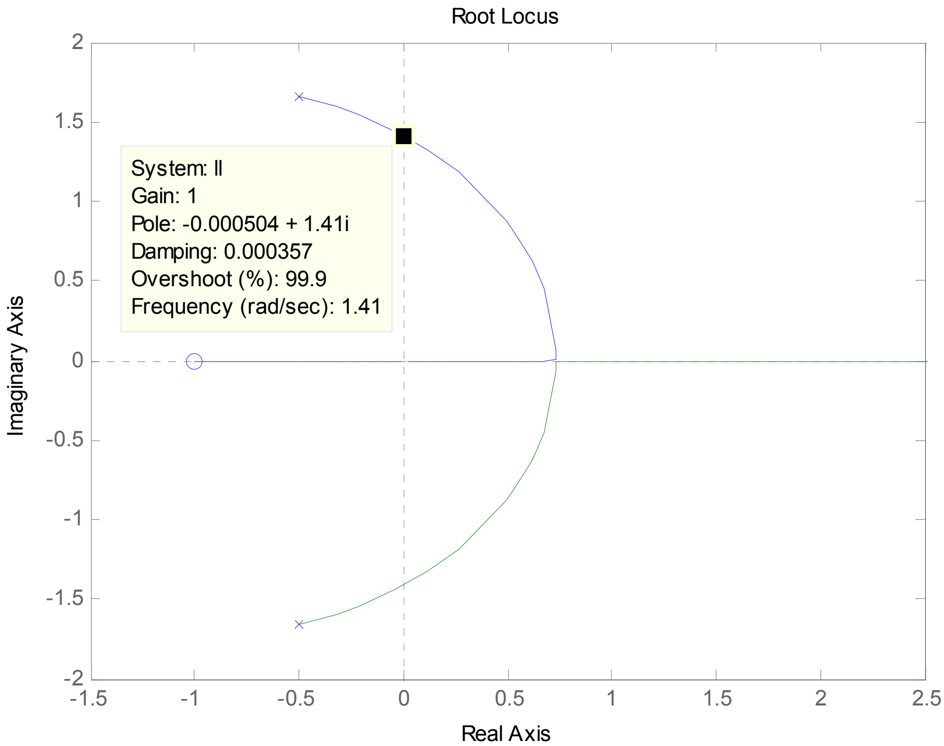
Έχουμε το αβέβαιο πολυώνυμο $p(s,q)=s^2+(2-q)s+(3-q)$ το οποίο μπορεί να γραφεί και με την μορφή $p(s,q)=(s^2+2s+3)-q(s+1)$. Θεωρούμε το σύστημα

$$P(s,q)=\frac{-(s+1)}{s^2+2s+3}$$

όπου q είναι το κέρδος και το οποίο συνδέεται με μία μοναδιαία ανάδραση όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Αν το αβέβαιο όριο Q έχει διαστάσεις $[q^-, q^+]$ μας ενδιαφέρει το μέρος του γεωμετρικού τόπου που αντιστοιχεί στο q που είναι μεταξύ του q^- και του q^+.



Γενικεύοντας την έννοια του γεωμετρικού τόπου υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο $p(s,q)$ έχει βαθμό n για όλα $q \in Q$ και αβέβαιους συντελεστές οι οποίοι εξαρτώνται γραμμικά από την αβέβαιη παράμετρο q, ο συντελεστής $a_i(q)$ του s^i του $p(s,q)$ είναι της μορφής

$$a_i(q) = a_i q + \beta_i$$

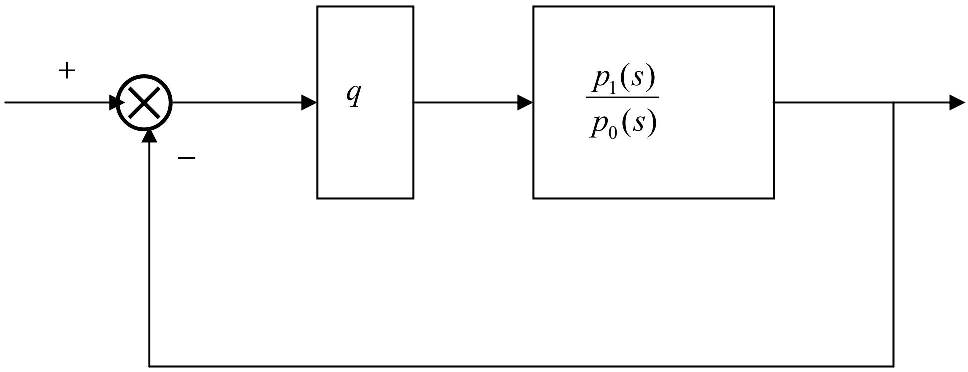
όπου a_i και β_i είναι πραγματικοί συντελεστές. Λαμβάνοντας υπόψη την μορφή του $a_i(q)$ το αβέβαιο πολυώνυμο $p(s,q)$ γράφεται

$$p(s,q) = p_0(s) + qp_1(s)$$

όπου το πολυώνυμο $p_0(s)$ είναι ευσταθές με θετικούς συντελεστές. Μπορούμε να μελετήσουμε την εύρωστη ευστάθεια χρησιμοποιώντας το διάγραμμα του γεωμετρικού τόπου για το σύστημα

$$P(s) = \frac{p_1(s)}{p_0(s)}$$

το οποίο συνδέεται με την μοναδιαία ανάδραση και το κέρδος q όπως φαίνεται στο σχήμα.



Κάτι τέτοιο είναι δυνατόν καθώς το κλειστό σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς με παρονομαστή $p(s,q)$.

Η βασική συνθήκη που πρέπει να ισχύει για τον εύρωστη ευστάθεια είναι ότι κάθε ρίζα του πολυωνύμου που είναι μέσα στο διακεκριμένο σύνολο του γεωμετρικού τόπου πρέπει να βρίσκεται στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο. Ωστόσο αυτή η ερμηνεία δεν είναι και η καλύτερη γιατί αφορά τα συστήματα των οποίων οι συντελεστές εξαρτώνται γραμμικά από μια παράμετρο q . Αν οι συντελεστές εξαρτώνται από την μεταβλητή q και είναι μη γραμμικοί δεν υπάρχει σύστημα ανάδρασης που να σχετίζεται με προβλήματα και με τους κανόνες του γεωμετρικού τόπου .

2.3 ΣΤΑΘΕΡΟΣ ΒΑΘΜΟΣ.

Υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο $p(s,q)$ έχει βαθμό n για όλα τα $q \in Q$. Το αντικείμενο αυτής της παραγράφου είναι να ορίσουμε την έννοια του σταθερού βαθμού για το πολυώνυμο $p(s,q)$.

Σταθερός Βαθμός (Invariant Degree): Μια οικογένεια πολυωνύμων η οποία περιγράφεται από την σχέση $P = \{p(.,q) : q \in Q\}$ λέγεται ότι είναι σταθερού βαθμού αν ισχύει η εξής σχέση

$$\deg p(s,q^1) = \deg p(s,q^2) \text{ για κάθε } q^1, q^2 \in Q .$$

Αν το αβέβαιο πολυώνυμο περιγράφεται από την σχέση $p(s,q) = \sum_{i=0}^{n} a_i(q) s^i$ τότε η οικογένεια P είναι σταθερού βαθμού αν και μόνο αν το $a_n(q) \neq 0$ για όλα τα $q \in Q$.

2.4 ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΓΙΑ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ.

Θεωρούμε το αβέβαιο πολυώνυμο $p(s,q) = p_0(s) + q p_1(s)$ με αβέβαια όρια τα οποία κυμαίνονται $Q = [q^-, q^+]$. Στην παράγραφο αυτή αντί να χρησιμοποιήσουμε το γεωμετρικό τόπο ριζών, θα παρέχουμε άλλους τρόπους λύσεων για να αντιμετωπίσουμε τα προβλήματα που αφορούν την εύρωστη ευστάθεια. Χρησιμοποιούμε τους συντελεστές $p_0(s)$ και $p_1(s)$ για να ορίσουμε πίνακες των οποίων οι ιδιοτιμές μας λένε τι πρέπει να γνωρίζουμε σχετικά με την εύρωστη ευστάθεια.

Υποοικογένειες (Subfamilies): Θεωρούμε το αβέβαιο πολυώνυμο $p(s,q) = p_0(s) + q p_1(s)$. Το πολυώνυμο $p_0(s)$ είναι ευσταθές. Το αβέβαιο όριο δίνεται από το διάστημα $Q = [q^-, q^+]$ όπου $q^- \leq 0$ και $q^+ \geq 0$. Ορίζουμε τις υποοικογένειες

$$P(q^+) = \{p(.,q) : 0 \leq q \leq q^+\}$$

και

$$P(q^-) = \{p(.,q) : q^- \leq q \leq 0\}$$

οι οποίες προέρχονται από την πολυωνυμική οικογένεια $P = \{p(.,q) : q \in Q\}$.

Μέγιστο ευσταθές διάστημα (Maximal Stability Interval): Με βάση την υποοικογένεια $P(q^+)$ το θετικό (δεξί) όριο ευστάθειας της οικογένεια δίνεται από τον τύπο

$$P(q^{+}) = \sup\{q^{+} : P(q^{+}) \text{ είναι εύρωστα ευσταθές}\},$$

Αντίστοιχα με βάση την υποοικογένεια $P(q^{-})$ το αρνητικό (αριστερό) εύρωστο όριο δίνεται από τον τύπο

$$P(q^{-}) = \inf\{q^{-} : P(q^{-}) \text{ είναι εύρωστα ευσταθές }\}$$

Τέλος το διάστημα

$$Q_{\max} = (q^{-}_{\min}, q^{+}_{\max}) \quad \textit{(2.4.1)}$$

μας δίνει το μέγιστο διάστημα της εύρωστης ευστάθειας.

Ο Πίνακας του Hurwitz (Hurwitz Matrix): Έστω το πολυώνυμο

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 s + a_0$$

όπου $a_n > 0$, ο πίνακα $n \times n$ ορίζεται ως

$$H(p) = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & & a_0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

ο οποίος ονομάζεται *Πίνακας Hurwitz* που αντιστοιχεί στο πολυώνυμο $p(s)$

Κριτήριο ευστάθειας Hurwitz (Hurwitz Stability Criterion): Το πολυώνυμο $p(s)$ είναι ευσταθές εάν και μόνο αν όλες οι πρωταρχικές ελάσσονες ορίζουσες του πίνακα $H(p)$ είναι θετικές. Η πρώτη πρωταρχική ελάσσονα (first principal minors) δίνεται από την σχέση $\Delta_1 = \alpha_n - 1$ ενώ η δεύτερη (second principal minors) από την σχέση $\Delta_2 = \det\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{bmatrix}$

Και η τελευταία πρωταρχική ελάσσονα ορίζουσα (last principal minor) ισούται $\Delta_n = \det H(p)$

Ορισμός των ιδιοτιμών $\lambda^{+}_{\max}(M)$ και $\lambda^{-}_{\min}(M)$: Σε ένα πίνακα M διαστάσεων $n\times n$ συμβολίζουμε με $\lambda^{+}_{\max}(M)$ την μέγιστη πραγματική θετική ιδιοτιμή του M .Όταν ο πίνακας M δεν έχει κάποια μέγιστη πραγματική θετική ιδιοτιμή τότε $\lambda^{+}_{\max}(M)=0^{+}$. Αντίστοιχα σε ένα πίνακα M διαστάσεων $n\times n$ ορίζουμε με $\lambda^{-}_{\min}(M)$ την ελάχιστη πραγματική αρνητική ιδιοτιμή του M . Όταν ο πίνακας M δεν έχει κάποια ελάχιστη πραγματική αρνητική ιδιοτιμή τότε $\lambda^{-}_{\min}(M)=0^{-}$.

Κριτήριο Ιδιοτιμών (Eigenvalue Criterion): Θεωρούμε το αβέβαιο πολυώνυμο $p(s,q)=p_0(s)+qp_1(s)$, το $p(s,0)=p_o(s)$ είναι ευσταθές και έχει θετικούς συντελεστές και ισχύει η σχέση $\deg p_0(s)>\deg p_1(s)$.Τότε τα όρια του διαστήματος για την εύρωστη ευστάθεια δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$q^{+}_{\max}=\frac{1}{\lambda^{+}_{\max}(-H^{-1}(p_0)H(p_1))} \qquad (2.4.2)$$

και

$$q^{-}_{\min}=\frac{1}{\lambda^{-}_{\min}(-H^{-1}(p_0)H(p_1))} \qquad (2.4.3).$$

2.5 ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ.

Για την παραγωγή αναλυτικότερων αποτελεσμάτων μερικές φορές είναι πιο εύκολο να περιγράψουμε το $p(s,q)=p_0(s)+qp_1(s)$ σαν ένα πολυώνυμο που έχει μια μόνο παράμετρο αβεβαιότητας την λ. Αν αντικαταστήσουμε στην σχέση $\lambda=\dfrac{q^{+}-q}{q^{+}-q^{-}}$ το $q=q^{+}\rightarrow\lambda=0$ και $q=q^{-}\rightarrow\lambda=1$ επομένως το $\lambda\in[0,1]$. Με $Q=[q^{-},q^{+}]$ η οικογένεια πολυωνύμων έχει σαν ακραία όρια τα $p(s,q^{-})$ και $p(s,q^{+})$. Εκφράζουμε το $p(s,q)$ σαν ένα γραμμικό συνδυασμό των $p(s,q^{-})$ και $p(s,q^{+})$ και με βάση την σχέση

$$\lambda=\frac{q^{+}-q}{q^{+}-q^{-}}$$

προκύπτει ότι

$$\bar{p}(s,q)=\lambda\, p\ (s,q^-)+(1-\lambda)\, p_1(s,q^+)\,.$$

Αντιστρόφως αν αντιστοιχίσουμε το $\lambda\in[0,1]$ με το $q\in[q^-,q^+]$ θα προκύψει ότι $\bar{p}(s,\lambda)=p(s,q)$. Δίνοντας αυτή την σχέση μεταξύ $q\in Q$ και $\lambda\in[0,1]$ είναι πιο εύκολο είτε να δουλέψουμε με την αυθεντική οικογένεια πολυωνύμων είτε με τις ισοδύναμες οικογένειες $\bar{P}=\{\bar{p}(.,\lambda):\lambda\in[0,1]\}$ που παράγει το πολυώνυμο

$$\bar{p}(s,q)=\lambda\,\bar{p}_0(s)+(1-\lambda)\,\bar{p}_1(s)$$

όπου $\bar{p}_0(s)$ και $\bar{p}_1(s)$ είναι πολυώνυμα χωρίς αβεβαιότητα. Επομένως ισχύει ότι $P=\bar{P}$.

Ένας τρόπος για να ελέγξουμε την ευστάθεια ενός πολυωνύμου είναι μέσα από το θεώρημα του Bialas [3].

Θεώρημα Bialas 1985 (Bialas 1985): Θεωρούμε την οικογένεια των πολυωνύμων P η οποία περιγράφετε από την σχέση $p(s,\lambda)=\lambda p_0(s)+(1-\lambda)p_1(s)$ με $\lambda\in[0,1]$ όπου $p_o(s)$ και $p_1(s)$ είναι πολυώνυμα. Το $p_o(s)$ είναι ευσταθές με θετικούς συντελεστές και το $n=\deg p_0(s)>\deg p_1(s)$. Η οικογένεια P είναι εύρωστα ευσταθής αν και μόνο αν ο πίνακας $H^{-1}(p_0)H(p_1)$ δεν έχει πραγματικές μη θετικές ιδιοτιμές (μπορεί να περιέχει και το μηδέν).

2.6 ΠΙΝΑΚΕΣ.

Στην παράγραφο αυτή παραθέτουμε τα βήματα που απαιτούνται για να γενικεύσουμε το θεώρημα των ιδιοτιμών της σελίδας 16 για τους πίνακες . Θεωρούμε το αβέβαιο πίνακα που έχει την μορφή

$$A(q)=A_0+qA_1 \quad \textit{(2.6.1)}$$

όπου A_0 και A_1 είναι σταθεροί πίνακες $n\times n$ διαστάσεων. Υποθέτουμε ότι το A_0 είναι ευσταθής πίνακας. Ορίζουμε το αρνητικό (αριστερό) και το θετικό (δεξί) εύρωστο όριο όπως κάναμε και στις πολυωνυμικές οικογένειες. Οι υποοικογένειες των πινάκων δίνονται από τους ορισμούς :

$$A(q^+)=\{A(q):0\le q\le q^+\} \quad \textit{(2.6.2)}$$

και

$$A(q^-) = \{A(q) : q^- \le q \le 0\} \quad (2.6.3)$$

με βάση τις παραπάνω σχέσεις τα όρια ορίζονται ως εξής

$$q^+_{\max} = \sup\{q^+ : A(q^+) \text{ είναι εύρωστα ευσταθές }\}$$

και

$$q^-_{\min} = \inf\{q^- : A(q^-) \text{ είναι εύρωστα ευσταθές }\},$$

η οικογένεια $A(q)$ είναι ευσταθής αν κάθε $A \in A(q)$ έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο ή ισοδύναμα αν το πολυώνυμο

$$p_A(s) = \det(sI - A) \quad (2.6.3)$$

είναι ευσταθές για όλα τα $A \in A$.

Όταν οι διαστάσεις του πίνακα είναι $n^2 \times n^2$ και ανήκουν στην οικογένεια A^+ ο πίνακας της $A^+(q)$ έχει την μορφή

$$A^+(q) = A_0^+ + qA_1^+$$

όπου A_0^+ και A_1^+ είναι πίνακες $n^2 \times n^2$ διαστάσεων. Τα μη μοναδιαία ορίσματα που δίνονται από τους πίνακες $H(p_0) + qH(q_1)$ αντικαθιστούνται τώρα τα ορίσματα που περιλαμβάνουν $A_0^+ + qA_1^+$.

Πράξεις Kronecker (Kronecker Operations): Υποθέτουμε ότι A και B είναι τετραγωνικοί πίνακες με διαστάσεις n_1 και n_2 αντίστοιχα. Ο πολλαπλασιασμός Kronecker $A \otimes B$ είναι τετραγωνικός πίνακας με διστάσεις $n_1 n_2$.Το άθροισμα Kronecker $A \oplus B$ έχει και αυτό επίσης διαστάσεις $n_1 n_2$ και δίνεται από τον τύπο

$$A \oplus B = A \otimes I_{n2} + I_{n1} \otimes B \qquad (2.6.4)$$

όπου I_k δηλώνει την ταυτότητα του πίνακα . Τέλος η διαφορά Kronecker $A\Theta B$ δίνεται από τον τύπο

$$A\Theta B = A \oplus (-B) \quad (2.6.5).$$

Σε ειδικές περιπτώσεις όταν ο πίνακας A είναι $n \times n$ διαστάσεων και έχει την μορφή $A \oplus A$. Χρησιμοποιώντας την σχέση

$$A \oplus A = A \otimes I_n + I_n \otimes A \qquad (2.6.6)$$

είναι εύκολο να δούμε ότι το $A \oplus A$ είναι $n^2 \times n^2$ διαστάσεων πίνακας και ότι για το (i,j)-στοιχείο έχουμε $A + a_{ij} I_n$ όταν $i = j$ και $a_{ij} I_n$ για $i \neq j$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Πράξεις Kronecher)

Έχουμε τους παρακάτω πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

να υπολογιστούν τα $A \oplus B$ και $A \otimes B$ οι οποίοι θα είναι πίνακες 4×4 διαστάσεων. Μετά από απλές πράξεις προκύπτει ότι

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 10 & 12 \\ 7 & 8 & 14 & 16 \\ 15 & 18 & 20 & 24 \\ 21 & 24 & 28 & 32 \end{bmatrix}$$

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 2 & 0 \\ 7 & 9 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 3 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

Με την βοήθεια του κριτηρίου των ιδιοτιμών της σελίδας 16 και των πράξεων Kronecher μπορούμε να ορίσουμε τα όρια εύρωστης ευστάθειας της δεξιάς και αριστερής πλευράς με μία διαφορετική μορφή. Αν αντικαταστήσουμε την σχέση $H(p_o) = qH(p_1)$ με την σχέση $(A_0 \oplus A_o) = q(A_1 \oplus A_1)$ τα όρια της αριστερής και της δεξιάς πλευράς μπορούν να περιγραφούν ως εξής

$$q_{\max}^{+} = \frac{1}{\lambda_{\max}^{+}(-(A_0 \oplus A_0)^{-1}(A_1 \oplus A_1))} \quad \textit{(2.6.7)}$$

και

$$q_{\min}^{-} = \frac{1}{\lambda_{\min}^{-}(-(A_0 \oplus A_0)^{-1}(A_1 \oplus A_1))} \quad \textit{(2.6.8)}$$

Κεφαλαίο 3^{o}

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΕ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

3.1ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΗ ΑΒΕΒΑΙΗ ΔΟΜΗ .

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε την έννοια της ανεξάρτητης αβέβαιης δομής . Το πιο συναρπαστικό κίνητρο για την μελέτη της ανεξάρτητης αβέβαιης δομής προέρχεται από το ακόλουθο σενάριο : Ένας μηχανικός παράγει ένα σταθερό μοντέλο για ένα σύστημα ελέγχου και αποκτά το πολυώνυμο $p(s)$. Παρόλο που η παρουσία της αβεβαιότητας είναι άγνωστη , η εξάρτηση από την μεταβλητή q είναι περίπλοκη. Η αβέβαιη δομή είναι πολύ πολύπλοκη για να την αναλύσουμε μαθηματικά, είναι ωστόσο σημαντικό να γνωρίζουμε και το βαθμό ευστάθειας. Χρησιμοποιώντας την ανεξάρτητη αβέβαιη δομή μπορούμε να βρούμε σε τι ποσοστό ανέρχεται η απόκλιση των συντελεστών του πολυωνύμου $p(s)$.

Ανεξάρτητη αβέβαιη δομή (Independent Uncertainty Structure):
Θα λέγεται ότι το αβέβαιο πολυώνυμο

$$p(s,q)=\sum_{i=0}^{n} a_i(q)s^i \quad (3.1.1)$$

έχει μια ανεξάρτητη αβέβαιη δομή εάν κάθε q_i από τα q υπάρχει σε ένα μόνο συντελεστή του πολυωνύμου.

3.2 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΟΠΟΥ ΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΕΙΝΑΙ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ.

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε τις πολυωνυμικές οικογένειες των οποίων οι συντελεστές είναι σε διάστημα καθώς και την έννοια του lumping . Με την έννοια του lumping εννοούμε τον συνδυασμό αβέβαιων παραμέτρων q_i έτσι ώστε να προκύψει ένας μικρότερος αριθμός παραμέτρων που περιγράφουν την πολυωνυμική οικογένεια. Ορίζουμε $\bar{P}=\{\bar{p}(.,\bar{q}):\bar{q}\in \bar{Q}\}$ την lumping εκδοχή της αρχικής οικογένειας P.

Πολυωνυμικές οικογένειες όπου οι συντελεστές τους είναι σε διάστημα (Interval Polynomial Family): Μια οικογένεια πολυωνύμων $P=\{p(.,q):q\in Q\}$ λέγεται ότι είναι πολυωνυμική οικογένεια με συντελεστές σε διάστημα εάν το $p(s,q)$ έχει μια ανεξάρτητη αβέβαιη δομή σε κάθε συντελεστή.

Ένα αβέβαιο πολυώνυμο που έχει την μορφή $p(s,q)=\sum_{i=0}^{n} q_i s^i$ όπου $q^- \le q \le q^+$ μπορεί να συμβολιστεί και ως

$$p(s,q)=\sum_{i=0}^{n}[q_i^-,q_i^+]s^i \quad (3.2.1)$$

όπου με $[q_i^-,q_i^+]$ δηλώνουμε το διάστημα των ορίων για το i-στοιχείο της αβεβαιότητας q_i. Το πολυώνυμο $p(s,q)$ ορίζεται σαν ένα πολυώνυμο όπου οι συντελεστές του είναι σε διάστημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Απλό πολυώνυμο με συντελεστές σε διάστημα)

Στο παράδειγμα αυτό θα δούμε με πιο τρόπο μπορούμε να γράψουμε ένα πολυώνυμο που έχει συντελεστές σε διάστημα. Μια πολυωνυμική οικογένεια P με συντελεστές σε διάστημα μπορεί να γραφτεί ως :

$p(s,q)=(5+q_4)s^4+(3+q_3)s^3+(2+q_2)s^2+(4+q_1)s+(6+q_0)$ όπου τα αβέβαια όρια $|q_i|\le 1$ για κάθε $i=1,2,3,4$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Σταθεροί συντελεστές)

Ο ορισμός του πολυωνύμου όπου οι συντελεστές είναι σε διάστημα δεν αποκλείει και την πιθανότητα ότι μερικοί συντελεστές του $p(s,q)$ μπορεί να είναι σταθεροί αριθμοί και να μην περιέχουν αβεβαιότητα. Παραδείγματος χάριν το $p(s,q)=(5+q_4)s^4+3s^3+(2+q_2)s^2+(4+q_1)s+6$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Lumping για πολυώνυμα σε διάστημα)

Έχουμε το παρακάτω πολυώνυμο

$p(s,q)=s^3+(5+q_2+2q_3)s^2+(6+2q_1+5q_4)s+(3+q_0)$ με όρια $|q_i|\le 0.5$ για κάθε $i=1,2,3,4$. Παρατηρούμε ότι η αβέβαιη αναπαράσταση του πολυωνύμου περιέχει πλεονάζοντα στοιχεία.

Εφαρμόζουμε «Lumping» στις παραμέτρους του πολυωνύμου και υλοποιούμε τα εξής τρία βήματα :

1^o ΒΗΜΑ

Ορίζουμε τις νέες παραμέτρους: $\bar{q}_2 = 5 + q_2 + 2q_3$, $\bar{q}_1 = 6 + 2q_1 + 5q_4$ και $\bar{q}_0 = 3 + q_0$.

2ο ΒΗΜΑ

Ορίζουμε τα νέα αβέβαια όρια : $2.5 \leq \bar{q}_0 \leq 3.5$, $2.5 \leq \bar{q}_1 \leq 9.5$ και $3.5 \leq \bar{q}_2 \leq 6.5$.

3οΒΗΜΑ

Το νέο αβέβαιο πολυώνυμο που προκύπτει είναι το $\bar{p}(s, \bar{q}) = s^3 + \bar{q}_2 s^2 + \bar{q}_1 s + \bar{q}_0$.

3.3 ΘΕΩΡΗΜΑ KHARITONOV.

Το 1978 ο Ρώσος μαθηματικός Vladimir L. Kharitonov απέδειξε ότι προκειμένου να αποφανθούμε για την ευστάθεια μιας οικογένειας πολυωνύμων, των οποίων οι συντελεστές είναι σε διάστημα αρκεί να ελέγξουμε την ευστάθεια τεσσάρων μόνο πολυωνύμων των λεγομένων πολυωνύμων Kharitonov [5]. Πριν όμως αναφερθούμε στο θεώρημα του Kharitonov για την εύρωστη ευστάθεια θα πρέπει να ορίσουμε πρώτα τα τέσσερα πολυώνυμα με βάση τον ορισμό της πολυωνυμικής οικογένειας της οποίας οι συντελεστές είναι σε διάστημα.

Πολυώνυμα Kharitonov (The Kharitonov Polynomials): Από το πολυώνυμο που περιέχει συντελεστές σε διάστημα και περιγράφεται από την σχέση $p(s,q) = \sum_{i=0}^{n} \left[q_i^-, q_i^+ \right] s^i$ προκύπτει ότι υπάρχουν τέσσερα σταθερά πολυώνυμα που μπορούν να το περιγράψουν τα οποία ονομάζονται πολυώνυμα Kharitonov και ορίζονται ως εξής:

$$K_1(s) = q_0^- + q_1^- s + q_2^+ s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^- s^4 + q_5^- s^5 + q_6^+ s^6 + \cdots$$
$$K_2(s) = q_0^+ + q_1^+ s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^- s^6 + \cdots$$
$$K_3(s) = q_0^+ + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^- s^5 + q_6^- s^6 + \cdots$$
$$K_4(s) = q_0^- + q_1^+ s + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + q_4^- s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^+ s^6 + \cdots$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ(Πολυώνυμο Kharitonov)

Έχουμε το παρακάτω πολυώνυμο

$$p(s,q) = [1,2]s^5 + [3,4]s^4 + [5,6]s^3 + [7,8]s^2 + [9,10]s + [11,12]$$

σύμφωνα με το παραπάνω ορισμό τα τέσσερα πολυώνυμα Kharitonov που προκύπτουν είναι τα εξής :

$$K_1(s) = 11 + 9s + 8s^2 + 6s^3 + 3s^4 + s^5$$

$$K_2(s) = 12 + 10s + 7s^2 + 5s^3 + 4s^4 + 2s^5$$

$$K_3(s) = 12 + 9s + 7s^2 + 6s^3 + 4s^4 + s^5$$

$$K_4(s) = 11 + 10s + 8s^2 + 5s^3 + 3s^4 + 2s^5$$

Θεώρημα Kharitonov 1978a (Kharitonov 1978a): Μια πολυωνυμική οικογένεια σταθερού βαθμού με συντελεστές σε διάστημα είναι εύρωστα ευσταθής αν και μόνο αν και τα τέσσερα πολυώνυμα Kharitonov είναι ευσταθή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ(Ευστάθεια του πολυώνυμου Kharitonov)

Δίνεται η οικογένεια πολυωνύμων

$$p(s,q) = [0.25, 1.25]s^3 + [2.75, 3.25]s^2 + [0.75, 1.25]s + [0.25, 1.25].$$

Θα εξετάσουμε αν είναι ευσταθής με βάση το θεώρημα του Kharitonov.

Τα τέσσερα πολυώνυμα του Kharitonov που προκύπτουν είναι τα εξής :

$$K_1(s) = 0.25 + 0.75s + 3.25s^2 + 1.25s^3$$

$$K_2(s) = 1.25 + 1.25s + 2.75s^2 + 0.25s^3$$

$$K_3(s) = 1.25 + 0.75s + 2.75s^2 + 1.25s^3$$

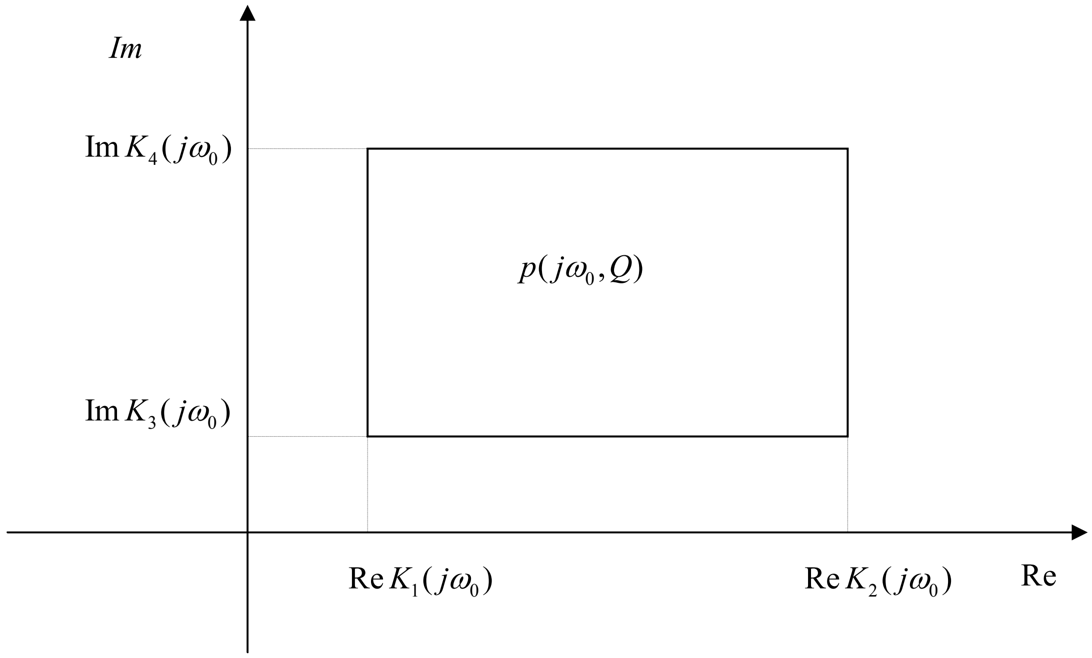
$$K_4(s) = 0.25 + 1.25s + 3.25s^2 + 0.25s^3$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Hurwitz αποδεικνύεται ότι και τα τέσσερα πολυώνυμα Kharitonov είναι ευσταθή άρα και το αρχικό πολυώνυμο θα είναι ευσταθές.

3.4 ΤΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ ΤΟΥ KHARITONOV.

Ορίζουμε με $p(j\omega_0, Q)$ το παραλληλόγραμμο Kharitonov για τις συχνότητες $\omega = \omega_0$. Το $p(j\omega_0, Q)$ είναι ένα παραλληλόγραμμο του οποίου οι κορυφές του εξαρτώνται από τα τέσσερα πολυώνυμα Kharitonov $K_1(s), K_2(s), K_3(s)$ και $K_4(s)$

όπου $s = j\omega_0$. Ορίζουμε τις κορυφές του παραλληλογράμμου $p(j\omega_0, Q)$ με την βοήθεια των τεσσάρων πολυωνύμων Kharitonov:



Κάνοντας απλές πράξεις υπολογίζουμε τις κορυφές:

Νοτιοδυτική κορυφή:

$$\operatorname{Re} K_1(j\omega_0) + j \operatorname{Im} K_3(j\omega_0) = \operatorname{Re} K_1(j\omega_0) + j \operatorname{Im} K_1(j\omega_0) = K_1(j\omega_0)$$

Βορειοανατολική κορυφή:

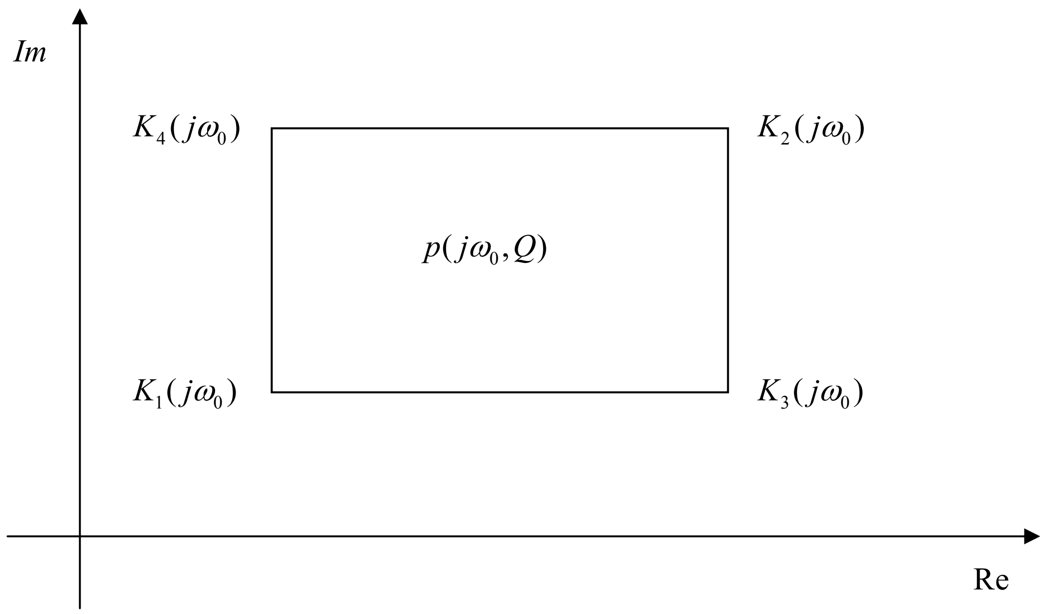
$$\operatorname{Re} K_2(j\omega_0) + j \operatorname{Im} K_4(j\omega_0) = \operatorname{Re} K_2(j\omega_0) + j \operatorname{Im} K_2(j\omega_0) = K_2(j\omega_0)$$

Νοτιοανατολική κορυφή:

$$\operatorname{Re} K_2(j\omega_0) + j \operatorname{Im} K_3(j\omega_0) = \operatorname{Re} K_3(j\omega_0) + j \operatorname{Im} K_3(j\omega_0) = K_3(j\omega_0)$$

Βορειοδυτική κορυφή:

$$\operatorname{Re} K_1(j\omega_0) + j \operatorname{Im} K_4(j\omega_0) = \operatorname{Re} K_4(j\omega_0) + j \operatorname{Im} K_4(j\omega_0) = K_4(j\omega_0)$$



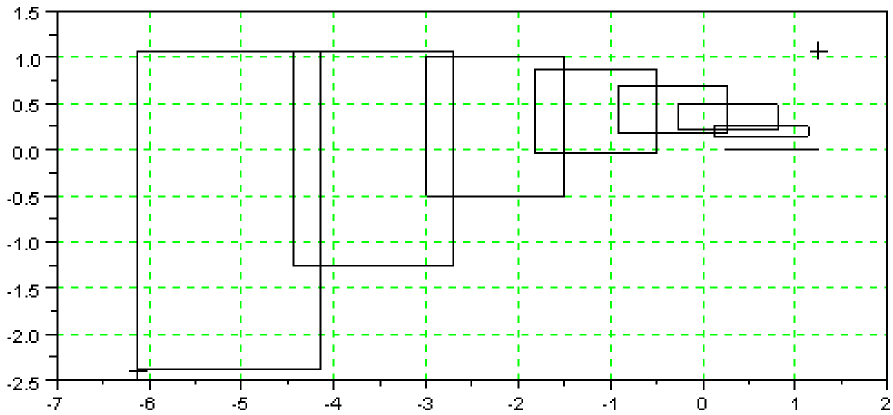
Παρατηρούμε ότι όλες οι κορυφές του τετραγώνου αντιστοιχούν σε ένα μοναδικό πολυώνυμο Kharitonov.

Κίνηση του τετραγώνου Kharitonov (Motion of Kharitonov Rectangle)

Μέχρι τώρα η συζήτηση για το τετράγωνο Kharitonov ήταν στο πλαίσιο όπου η συχνότητα παραμένει σταθερή $\omega = \omega_0$. Τώρα όμως θα εισάγουμε την έννοια της κίνησης της συχνότητας. Η συχνότητα ξεκινάει με αρχική τιμή μηδέν $\omega = 0$ και αρχίζει να αυξάνεται. Η αύξηση της συχνότητας οδηγεί το τετράγωνο σε κίνηση. Το τετράγωνο κινείτε στο μιγαδικό επίπεδο και οι κορυφές του αποκτούνται από τα τέσσερα πολυώνυμα Kharitonov. Γενικά οι διαστάσεις του τετραγώνου αλλάζουν ανάλογα με την συχνότητα *ω*.

Το παρακάτω σχήμα δείχνει το τετράγωνο Kharitonov σε κίνηση, το τετράγωνο προκύπτει από το πολυώνυμο

$$p(s,q) = [0.25, 1.25]s^3 + [2.75, 3.25]s^2 + [0.75, 1.25]s + [0.25, 1.25] \ .$$



3.5 ΣΥΝΘΗΚΗ ΑΠΟΦΥΓΗΣ ΤΟΥ ΜΗΔΕΝΟΣ.

Ένας γραφικός τρόπος για να ελέγξουμε την ευστάθεια των πολυωνύμων που οι συντελεστές τους είναι σε διάστημα είναι μέσα από την συνθήκη αποφυγής του μηδενός .

Συνθήκη αποφυγής του μηδενός (Zero exclusion condition): Υποθέτουμε την οικογένεια πολυωνύμων $P=\{p(.,q):q\in Q\}$ της οποίας οι συντελεστές είναι σε διάστημα. Η οικογένεια αυτή είναι σταθερού βαθμού και έχει τουλάχιστον ένα ευσταθές μέλος $p(s,q^0)$. Τότε η οικογένεια P είναι εύρωστα ευσταθής αν και μόνο αν το μηδέν δεν υπάρχει στο εσωτερικό κανενός τετραγώνου Kharitonov δηλαδή ισχύει $0\notin p(j\omega,Q)$ για όλες τις συχνότητες $\omega\geq 0$.

3.6 ΟΡΙΟ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ.

Το 1988 οι Fu και Barmish [4] κατέληξαν ότι υπάρχει ένα μέγιστο r για το οποίο όλα τα μέλη της οικογένειας είναι εύρωστα ευσταθή. Θεωρούμε ότι η οικογένεια έχει ευσταθές μέλος το $p_0(s)$ και μεταβλητό αβέβαιο όριο $r\geq 0$ και ορίζεται ως εξής

$$p_r(s,q) = p_0(s) + r\sum_{i=0}^{n-1}[-\varepsilon_i, \varepsilon_i]s^i \qquad (3.6.1)$$

Ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε το μέγιστο r για το οποίο όλα τα μέλη της οικογένειας είναι εύρωστα ευσταθή.

$$r_{\max} = \sup\{r : P_r \text{ είναι εύρωστα ευσταθές } \}\ .$$

Για να υπολογίσουμε το $r_{\max}$ θα πρέπει με βάση το θεώρημα του Kharitonov να μετατρέψουμε το πρόβλημα του εύρωστου ορίου σε τέσσερα διαφορετικά προβλήματα για τα αβέβαια πολυώνυμα $\{p_0(s) + qp_{1,i}(s)\}_{i=1}^4$ όπου

$$p_{1,1}(s) = -\varepsilon_0 - \varepsilon_1 s + \varepsilon_2 s^2 + \varepsilon_3 s^3 - \varepsilon_4 s^4 - \varepsilon_5 s^5 + \varepsilon_6 s^6 + \cdots;$$

$$p_{1,2}(s) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 s - \varepsilon_2 s^2 - \varepsilon_3 s^3 + \varepsilon_4 s^4 + \varepsilon_5 s^5 - \varepsilon_6 s^6 - \cdots;$$

$$p_{1,3}(s) = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 s - \varepsilon_2 s^2 + \varepsilon_3 s^3 + \varepsilon_4 s^4 - \varepsilon_5 s^5 - \varepsilon_6 s^6 + \cdots;$$

$$p_{1,4}(s) = -\varepsilon_0 + \varepsilon_1 s + \varepsilon_2 s^2 - \varepsilon_3 s^3 - \varepsilon_4 s^4 + \varepsilon_5 s^5 + \varepsilon_6 s^6 - \cdots;$$

Με βάση το θεώρημα των ιδιοτιμών της σελίδας 16 και θεωρώντας το $i = 1,2,3,4$ αποκτάμε την σχέση

$$r_{\max} = \min_{i \le 4} \frac{1}{\lambda_{\max}^{+}(-H^{-1}(p_0)H(p_{1,i}))} \qquad (3.6.2).$$

για το οποίο όλα τα μέλη της οικογένειας είναι ευσταθή.

3.7 ΕΥΡΩΣΤΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΓΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ.

Η συνθήκη αποφυγής του μηδενός προτείνει μια απλή γραφική διαδικασία για να ελέγξει κάποιος την εύρωστη ευστάθεια. Η ευστάθεια της οικογένειας εξαρτάται από το αν ικανοποιείται η συνθήκη $0 \notin p(j\omega, Q)$ για κάθε τετράγωνο Kharitonov $p(j\omega, Q)$ του οποίου η συχνότητα ω κυμαίνεται από Q ως $+\infty$. Αυτό οδηγεί στην επόμενη ερώτηση : Μπορούμε να βρούμε μερικές συχνότητες αποκοπής $\omega_c > 0$ τέτοιες ώστε $0 \notin p(j\omega, Q)$ για όλα τα $\omega > \omega_c$? Άρα ισοδύναμα, μπορούμε να τερματίσουμε την συχνότητα σάρωσης στο ω_c αντί για το άπειρο?

Η ύπαρξη του ω_c είναι εύκολη να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας την συνθήκη του σταθερού βαθμού. Υποθέτοντας ότι $p(s,q) = \sum_{i=o}^{n}[q_i^-, q_i^+]s^i$ και ότι $q_i^- > 0$ για $i = 0,1\cdots\cdots n$ και δίνοντας οποιοδήποτε $q \in R$ είναι εύκολο να δούμε ότι για $\omega \ge 0$ το

$$\left|p(j\omega,Q\right| \geq q_n^- \omega^n - \sum_{i=0}^{n-1} q_i^+ \omega^i \quad (3.7.1).$$

Από την στιγμή που το δεξί όριο τείνει στο $+\infty$ για $\omega \to +\infty$ προκύπτει ότι για οποιοδήποτε υπόδειξη $\beta > 0$ υπάρχει ένα $\omega_c > 0$ τέτοιο ώστε $\left|p(j\omega,Q\right| \geq \beta$ για όλα τα $\omega > \omega_c$. Οπότε $0 \notin p(j\omega,Q)$ για όλα τα $\omega > \omega_c$.

Στην πραγματικότητα είναι εύκολο να υπολογίσουμε ένα κατάλληλο ω_c. Για παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε ω_c έτσι ώστε να είναι η μεγαλύτερη πραγματική ρίζα του πολυωνύμου $f(\omega)$

$$f(\omega) = q_n^- \omega^n - \sum_{i=1}^{n-1} q_i^+ \omega^i \quad (3.7.2).$$

Άλλοι τρόποι για να υπολογίσουμε το ω_c προτείνονται από τα κλασικά όρια των ριζών του πολυωνύμου. Σύμφωνα με τον Marden (1966) [7], οι ρίζες του σταθερού θετικού πολυωνύμου $p(s,q) = \sum_{i=o}^{n} \alpha_i s^i$ ανήκουν όλες σε έναν δίσκο. Η ακτίνα του δίσκου δίνεται από την σχέση

$$R = 1 + \frac{\max(\alpha_0, \alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_{n-1})}{a_n} \quad (3.7.3).$$

Από το πολυώνυμο $p(s,q)$ με $q_n^- > 0$ προκύπτει ότι η κατάλληλη συχνότητα αποκοπής δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\omega_c = 1 + \frac{\max(q_0^+, q_1^+, \ldots\ldots, q_{n-1}^+)}{q_n^-} \quad (3.7.4).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Υπολογισμός του ω_c)

Θεωρούμε την πολυωνυμική οικογένεια $P = \{p(.,q) : q \in Q\}$ με συντελεστές σε διάστημα η οποία περιγράφεται ως εξής

$$p(s,q) = s^6 + [3.95, 4.05]s^5 + [3.95, 4.05]s^4 + [5.95, 6.05]s^3 + [2.95, 3.05]s^2 + [1.95, 2.05]s + [0.45, 0.55]$$

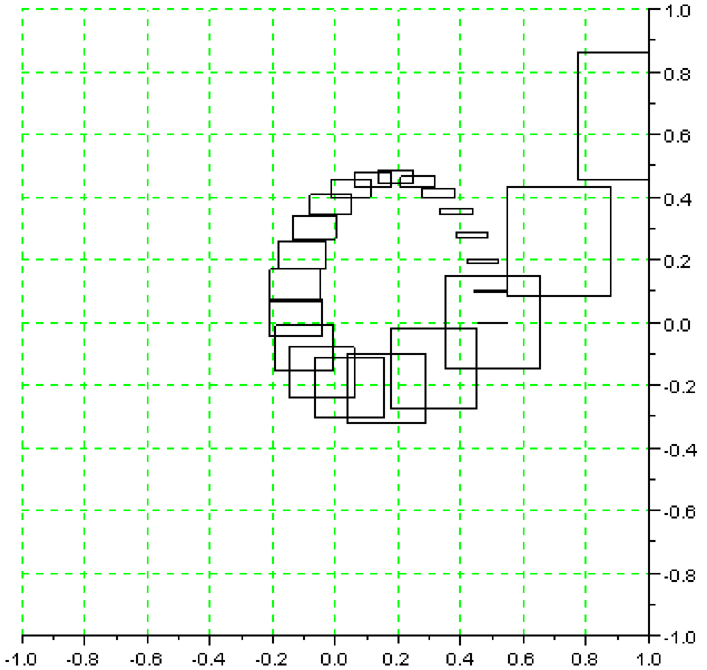
Σύμφωνα με τον ορισμό της συνθήκης αποφυγής του μηδενός το πρώτο βήμα στην γραφική αναπαράσταση της εύρωστης ευστάθειας απαιτεί ότι τουλάχιστον ένα πολυώνυμο της οικογένειας P να είναι ευσταθές . Χρησιμοποιώντας το μέσο της κάθε διάστασης αποκτάμε το πολυώνυμο

$p(s,q^0) = s^6 + 4s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 2s + 0.5$ του οποίου οι ρίζες είναι

$s_1 \approx -3.2681, s_{2,3} \approx -0.1328 \pm 0.9473j, s_{4,5} = -0.0731 \pm 0.7190j$ και $s_6 = -0.3201$. Στην συνέχεια σύμφωνα με τον ορισμό της συχνότητας αποκοπής που δώσαμε παραπάνω υπολογίζουμε την μεγαλύτερη πραγματική ρίζα του πολυωνύμου $f(\omega)$,

$$f(\omega) = \omega^6 - 4.05\omega^5 - 4.05\omega^4 - 6.05\omega^3 - 3.05\omega^2 - 2.05\omega - 0.55,$$

Με βάση τον τύπο της συχνότητας ω_c βρίσκουμε ότι το $\omega_c \approx 5.1023$ και την θεωρούμε ως την αποδεκτή συχνότητα αποκοπής που απαιτείτε για να σχεδιάσουμε το τετράγωνο του Kharitonov.



3.8 OVERBOUNDING ΓΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΕ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ.

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου η ανεξάρτητη αβέβαιη δομή μας περιορίζει, καθώς συνήθως στην πράξη οι αβέβαιες παράμετροι εισάγονται σε περισσότερο από ένα συντελεστή. Για να εξετάσουμε αυτή την «εξάρτηση» των αβέβαιων παραμέτρων υπάρχουν δυο εναλλακτικές: Η πρώτη εναλλακτική είναι η γενίκευση των θεωριών σε προβλήματα με εξαρτημένη αβεβαιότητα, κάτι που σαν πρόβλημα δεν έχει ακόμα λυθεί. Η δεύτερη εναλλακτική είναι αυτή που ονομάζεται «overbounding method » η οποία περιγράφεται παρακάτω.

Έχουμε το πολυώνυμο $p(s,q)$ το οποίο δεν χρειάζεται να έχει περισσότερες από μία ανεξάρτητες αβέβαιες παραμέτρους και επιπλέον το Q δεν είναι απαραίτητο να είναι τετράγωνο. Ξεκινάμε με το αβέβαιο πολυώνυμο $p(s,q)=\sum_{i=o}^{n}\alpha_i(q)s^i$ και το αβέβαιο όριο Q. Υποθέτουμε ότι οι συντελεστές της συνάρτησης $a_i(q)$ εξαρτώνται από το q. Προσπαθώντας να μετατρέψουμε την οικογένεια αυτή σε οικογένεια με συντελεστές σε διάστημα, τα όρια των συντελεστών του πολυωνύμου ορίζονται ως:

$$\bar{q}_i^{-} = \min_{q\in Q} a_i(q) \quad (3.8.1)$$

και

$$\bar{q}_i^{+} = \max_{q\in Q} a_i(q) \quad (3.8.2).$$

Επομένως η πολυωνυμική οικογένεια $\overline{P}$ με βάση τα όρια που ορίσαμε παραπάνω μπορεί να περιγραφεί από τον παρακάτω τύπο

$$\overline{p}(s,\overline{q}) = \sum_{i=0}^{n}[\bar{q}_i^{-},\bar{q}_i^{+}]s^i \quad (3.8.3)$$

Τα πολυώνυμα της οικογένειας P περιέχονται στην $\overline{P}$.Άρα η εύρωστη ευστάθεια της $\overline{P}$ συνεπάγεται την εύρωστη ευστάθεια της P, χωρίς όμως να ισχύει το αντίστροφο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Επιτυχία του overbounding)

Θεωρούμε την οικογένεια πολυωνύμων P η οποία περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση

$$p(s,q)=s^4+(5+0.2q_1q_2+0.1q_1-0.1q_2)s^3+(6+3q_1q_2-4q_2)s^2+(6+6q_1-8q_2)s+(0.5-3q_1q_2)$$

και τα αβέβαια όρια $|q_i|\le 0.25$ για $i=1,2$. Θα πρέπει να προσδιορίσουμε αν η οικογένεια P είναι εύρωστα ευσταθής.

1$^{\mathbf{o}}$ ΒΗΜΑ Υπολογίζουμε τα όρια

$$\bar{q}_0^- = \min_{q\in Q} a_0(q) = \min_{-0.25\le q_i \le 0.25}(0.5-3q_1q_2) = 0.3125;$$

$$\bar{q}_0^+ = \max_{q\in Q} a_0(q) = \max_{-0.25\le q_i \le 0.25}(0.5-3q_1q_2) = 0.6875;$$

$$\bar{q}_1^- = \min_{q\in Q} a_1(q) = \min_{-0.25\le q_i \le 0.25}(6+6q_1-8q_2) = 2.5;$$

$$\bar{q}_1^+ = \max_{q\in Q} a_1(q) = \max_{-0.25\le q_i \le 0.25}(6+6q_1-8q_2) = 9.5;$$

$$\bar{q}_2^- = \min_{q\in Q} a_2(q) = \min_{-0.25\le q_i \le 0.25}(6+3q_1q_2-4q_2) = 4.8125;$$

$$\bar{q}_2^+ = \max_{q\in Q} a_2(q) = \max_{-0.25\le q_i \le 0.25}(6+3q_1q_2-4q_2) = 7.1875;$$

$$\bar{q}_3^- = \min_{q\in Q} a_3(q) = \min_{-0.25\le q_i \le 0.25}(5+0.2q_1q_2+0.1q_1-0.1q_2) = 4.9475;$$

$$\bar{q}_3^+ = \max_{q\in Q} a_3(q) = \max_{-0.25\le q_i \le 0.25}(5+0.2q_1q_2+0.1q_1-0.1q_2) = 5.0375;$$

2^o ΒΗΜΑ Ορίζουμε την πολυωνυμική οικογένεια $\bar{P}$ που χρησιμοποιείται

$$\bar{p}(s,\bar{q}) = s^4 + [4.9475, 5.0375]s^3 + [4.8125, 7.1875]s^2 + [2.5, 9.5]s + [0.3125, 0.6875].$$

3^o ΒΗΜΑ Τα τέσσερα πολυώνυμα Kharitonov που προκύπτουν είναι τα εξής :

$$K_1(s) = 0.3125 + 2.5s + 7.1875s^2 + 5.0375s^3 + s^4$$
$$K_2(s) = 0.6875 + 9.5s + 4.8125s^2 + 4.9475s^3 + s^4$$
$$K_3(s) = 0.6875 + 2.5s + 4.8125s^2 + 5.0375s^3 + s^4$$
$$K_4(s) = 0.3125 + 9.5s + 7.1875s^2 + 4.9475s^3 + s^4$$

Με βάση το θεώρημα του Kharitonov για την οικογένεια $\bar{P}$,είναι εύκολο να επιβεβαιωθεί ότι και τα τέσσερα πολυώνυμα Kharitonov είναι ευσταθή. Από την εύρωστη ευστάθεια της $\bar{P}$ καταλήγουμε ότι και η αρχική οικογένεια P είναι ευσταθής .

***ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ* (Αποτυχία του overbounding)**:

Στο παράδειγμα αυτό θα δείξουμε πως μπορεί να αποτύχει η μέθοδος overbounding. Θεωρούμε την ευσταθή οικογένεια πολυωνύμων P όπως δίνεται από τους Wei και Yedavalli (1989) [9], που περιγράφεται ως εξής

$$p(s,q) = s^4 + s^3 + 2qs^2 + s + q$$

με το αβέβαιο όριο να είναι $Q = [1.5, 4]$. Ξέρουμε ότι η P είναι εύρωστα ευσταθής, η overbounding οικογένεια που παράγεται από την P είναι η

$$\overline{p}(s,\overline{q}) = s^4 + s^3 + [3,8]s^2 + s + [1.5,4].$$

Τα τέσσερα πολυώνυμα Kharitonov που προκύπτουν από την overbounding οικογένεια είναι τα εξής:

$$K_1(s) = 1.5 + s + 8s^2 + s^3 + s^4$$
$$K_2(s) = 4 + s + 3s^2 + s^3 + s^4$$
$$K_3(s) = 4 + s + 3s^2 + s^3 + s^4$$
$$K_4(s) = 1.5 + s + 8s^2 + s^3 + s^4$$

Ελέγχοντας την ευστάθεια των πολυωνύμων Kharitonov βρίσκουμε ότι τα πολυώνυμα $K_2(s)$ και $K_3(s)$ δεν είναι ευσταθή .

Κεφάλαιο 4

ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ KHARITONOV

4.1 ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΜΕ ΒΑΘΜΟ ΜΙΚΡΟΤΕΡΟ ΤΟΥ ΠΕΝΤΕ ΜΕ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ.

Το αντικείμενο αυτής της παραγράφου είναι να αποδείξουμε ότι λιγότερα από τέσσερα πολυώνυμα Kharitonov χρειάζονται για να ελέγξουμε την εύρωστη ευστάθεια σε πολυώνυμα που έχουν βαθμό πέντε ή και μικρότερο. Σε αυτό το συμπέρασμα κατέληξαν οι Anderson, Jury και Mansour το 1987 [1].

Απλοποιημένο θεώρημα του Kharitonov για βαθμό n=3 (Simplified Kharitonov Theorem for Degree n=3): Θεωρούμε μια οικογένεια πολυωνύμων P σταθερού βαθμού με $n=3$ και $q_0^- > 0$. Τότε το P είναι εύρωστα ευσταθές αν και μόνο αν το πολυώνυμο του Kharitonov $K_3(s)$ είναι ευσταθές .

Αποτέλεσμα για $n=4$. Θεωρούμε την πολυωνυμική οικογένεια P η οποία έχει τους συντελεστές της σε διάστημα με σταθερό βαθμό $n=4$ και αρνητικό συντελεστή ορίου μεγαλύτερο του μηδενός $q_0^- > 0$.Για n=4 το P είναι εύρωστα ευσταθές αν και μόνο αν τα δύο πολυώνυμα Kharitonov $K_2(s)$ και $K_3(s)$ είναι ευσταθή .

4.2 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΤΗΣ ΟΠΟΙΑΣ ΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΕΙΝΑΙ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ.

Στην εισαγωγή ορίσαμε συστήματα τα οποία περιέχουν συναρτήσεις μεταφοράς με αβεβαιότητα. Τώρα θα ορίσουμε συστήματα τα οποία περιέχουν συναρτήσεις μεταφοράς με συντελεστές σε διάστημα.

Σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς της οποίας οι συντελεστές είναι σε διάστημα (interval plant): Μια οικογένεια συστημάτων με συνάρτηση μεταφοράς της οποίας οι συντελεστές είναι σε διάστημα P περιγράφεται από την σχέση

$$P(s,q,r) = \frac{N(s,q)}{D(s,r)} \quad \textit{(4.2.1)}$$

όπου $N(s,q)$ είναι ο αβέβαιος πολυωνυμικός αριθμητής ο οποίος ορίζεται ως $N(s,q) = \sum_{i=0}^{m} q_i s^i$ και $D(s,r)$ είναι ο αβέβαιος πολυωνυμικός παρανομαστής ο οποίος ορίζεται ως $D(s,r) = \sum_{i=0}^{n} r_i s^i$.Με Q και R ορίζουμε τα αβέβαια όρια των q και r αντίστοιχα. Μπορούμε να ορίσουμε την σχέση *(4.2.1)* και ως

$$P(s,q,r)=\frac{\sum_{i=0}^{m}\left[q_i^-,q_i^+\right]s^i}{\sum_{i=0}^{n}\left[r_i^-,r_i^+\right]s^i} \quad (4.2.2)$$

Επίσης η πολυωνυμική οικογένεια P ορίζεται για την σχέση *(4.2.2)* ως $P=\{P(.,q,r):q\in Q;r\in R\}$.

Όταν το $n\geq m$ και έχοντας μια μοναδιαία ανάδραση μπορούμε να ορίσουμε όλες τις αβεβαιότητες για το πολυώνυμο του παρονομαστή του κλειστού συστήματος. Η σχέση που προκύπτει είναι η ακόλουθη

$$\begin{aligned}P(s,q,r)&=\sum_{i=0}^{m}\left[q_i^-,q_i^+\right]s^i+\sum_{i=0}^{n}\left[r_i^-,r_i^+\right]s^i\\&=\sum_{i=0}^{m}\left[q_i^-+r_i^-,q_i^++r_i^+\right]s^i+\sum_{i=m+1}^{n}\left[r_i^-,r_i^+\right]s^i\end{aligned} \quad (4.2.3)$$

4.3 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $H(\omega)$.

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε ότι μπορούμε να μελετήσουμε την εύρωστη ευστάθεια ελέγχοντας την θετικότητα της συνάρτησης $H(\omega)$. Αντί να εξετάσουμε το δυο διαστάσεων τετράγωνο του Kharitonov μπορούμε να εξετάσουμε το σχήμα της συνάρτησης $H(\omega)$ και να καθορίσουμε αν η οικογένεια του πολυωνύμου P είναι εύρωστα ευσταθής. Το θεώρημα του Barmish [2] μας δίνει μια εναλλακτική στο θεώρημα το Kharitonov.

Θεώρημα Barmish 1989 (Barmish 1989): Ορίζουμε ως P μια πολυωνυμική οικογένεια σταθερού βαθμού με συντελεστές σε διάστημα η οποία αποτελείται τουλάχιστον από ένα ευσταθές μέλος και της αντιστοιχούν τα πολυώνυμα του Kharitonov $K_1(s)$, $K_2(s)$, $K_3(s)$ και $K_4(s)$. Τότε θεωρώντας την συνάρτηση

$$H(\omega)=\max\{\operatorname{Re}K_1(j\omega),-\operatorname{Re}K_2(j\omega),\operatorname{Im}K_3(j\omega),-\operatorname{Im}K_4(j\omega)\}$$

προκύπτει ότι η πολυωνυμική οικογένεια P είναι εύρωστα ευσταθής αν και μόνο αν

$$H(\omega)>0$$

για όλες τις συχνότητες $\omega\geq 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Υπολογισμός του $H(\omega)$)

Στο παράδειγμα αυτό θα υπολογίσουμε την συνάρτηση μεταβολής συχνότητας $H(\omega)$. Θεωρούμε το παρακάτω πολυωνυμική οικογένεια με συντελεστές σε διάστημα

$$p(s,q) = \left[0.75, 1.25\right]s^3 + \left[2.75, 3.25\right]s^2 + \left[0.75, 1.25\right]s + \left[0.75, 1.25\right].$$

Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Barmish (1989) πρέπει η οικογένεια του πολυωνύμου να έχει τουλάχιστον ένα ευσταθές μέλος . Πράγματι για $q_0 = q_1 = q_3 = 1.25$ και $q_2 = 3.25$ η ευστάθεια επιβεβαιώνεται . Τα τέσσερα πολυώνυμα Kharitonov που προκύπτουν είναι

$$K_1(s) = 0.75 + 0.75s + 3.25s^2 + 1.25s^3$$

$$K_2(s) = 1.25 + 1.25s + 2.75s^2 + 0.75s^3$$

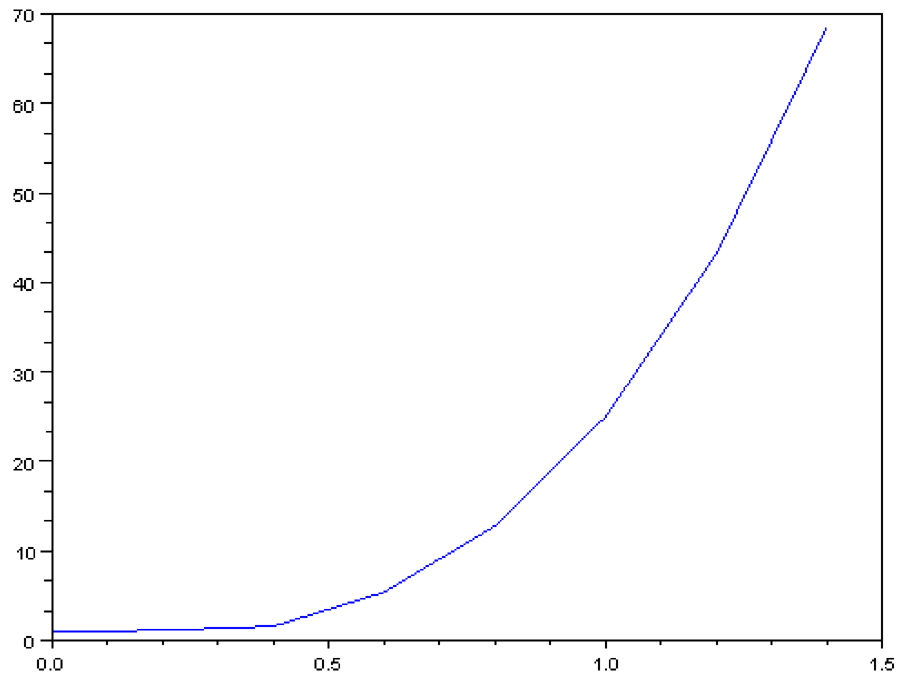
$$K_3(s) = 1.25 + 0.75s + 2.75s^2 + 1.25s^3$$

$$K_4(s) = 0.75 + 1.25s + 3.25s^2 + 0.75s^3$$

Αντικαθιστώντας το s με $j\omega$ και κάνοντας υπολογισμούς βρίσκουμε ότι η συνάρτηση $H(\omega)$ ισούται με

$$H(\omega) = \max\{0.75 - 3.75\omega^2, -1.25 + 2.75\omega^2, 0.75\omega + 1.75\omega^3, -1.25\omega - 0.75\omega^3\}.$$

Το παρακάτω σχήμα μας δείχνει το διάγραμμα της συνάρτησης $H(\omega)$ συναρτήσει της συχνότητας ω.



Η συνάρτηση παραμένει $H(\omega)$ εύρωστα ευσταθής όσο είναι θετική για όλες τις συχνότητες $\omega \geq 0$.

4.4 ΕΥΡΩΣΤΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΟΡΙΟ.

Στην εύρωστη ευσταθή οικογένεια πολυωνύμων υπάρχει ο πειρασμός να συσχετίζεις την απόσταση του τετραγώνου Kharitonov και της αρχής των αξόνων με το εύρωστο όριο . Όταν το $p(j\omega,Q)$ παραμένει πολύ μακριά από 0 για όλα τα $\omega \geq 0$ υποψιαζόμαστε ότι η οικογένεια έχει μεγάλα εύρωστα όρια. Όταν $p(j\omega,Q)$ είναι κοντά στο μηδέν για μερικές συχνότητες υποψιαζόμαστε ότι το εύρωστο όριο της οικογένειας είναι μικρό. Το βασικό αντικείμενο αυτής της παραγράφου είναι να αναλύσουμε τον παραπάνω τρόπο συλλογισμού με την βοήθεια του θεωρήματος Tsypkin –Polyak στην επόμενη παράγραφο. Η ιδέα είναι να μελετήσουμε την συμπεριφορά της απόστασης μεταξύ του 0 και του τετραγώνου του Kharitonov $p(j\omega,Q)$. Θέλουμε να βρούμε το ελάχιστο της απόστασης αυτής σε σχέση με την συχνότητα άρα να υπολογίσουμε την κοντινότερη απόσταση μεταξύ όλων των πιθανών τετραγώνων Kharitonov και του 0. Για παράδειγμα δυο φυσικά μεγέθη για την ελάχιστη απόσταση είναι:

$$d_{\min} = \min\{\|z\|_\infty : z \in p(j\omega, Q); \omega \geq 0\} \quad (4.4.1)$$

και το

$$d'_{\min} = \min\{|z|_\infty : z \in p(j\omega, Q); \omega \geq 0\} \quad (4.4.2).$$

4.5 ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ TSYPKIN ΚΑΙ POLYAK.

Παρακινούμενοι από την σύγκριση μεταξύ του $d_{\min}$ και του $r_{\max}$ που έγινε στην προηγούμενη παράγραφο το βασικό αντικείμενο αυτής της παραγράφου είναι να περιγράψουμε την τεχνική του γραφήματος του εύρωστου ορίου. Θέλουμε να παράγουμε ένα διάγραμμα το οποίο θα επιθεωρείται και με το μάτι, παρέχοντας εύκολη κατανόηση του εύρωστου ορίου για την ευστάθεια. Αναγνωρίζοντας ότι το διάγραμμα του τετραγώνου του Kharitonov δεν μας παρέχει τόσες πληροφορίες προχωράμε στο να κατασκευάσουμε την συνάρτηση $G_{TP}(\omega)$ όπως περιγράφεται από τους Tsypkin –Polyak(1991) [8].

Για να δώσουμε έμφαση στην εξάρτηση του αβέβαιου ορίου $r \geq 0$ γράφουμε

$$p_r(s,q) = p_0(s) + r\sum_{i=0}^{n-1}[-\varepsilon_i, \varepsilon_i]s^i \quad \text{όπου } \varepsilon_i \geq 0 \; (4.5.1).$$

Ονομάζουμε $p_0(s)$ το κεντρικό πολυώνυμο με σταθερούς όρους και μελετάμε την πολυωνυμική οικογένεια που έχει συντελεστές σε διάστημα

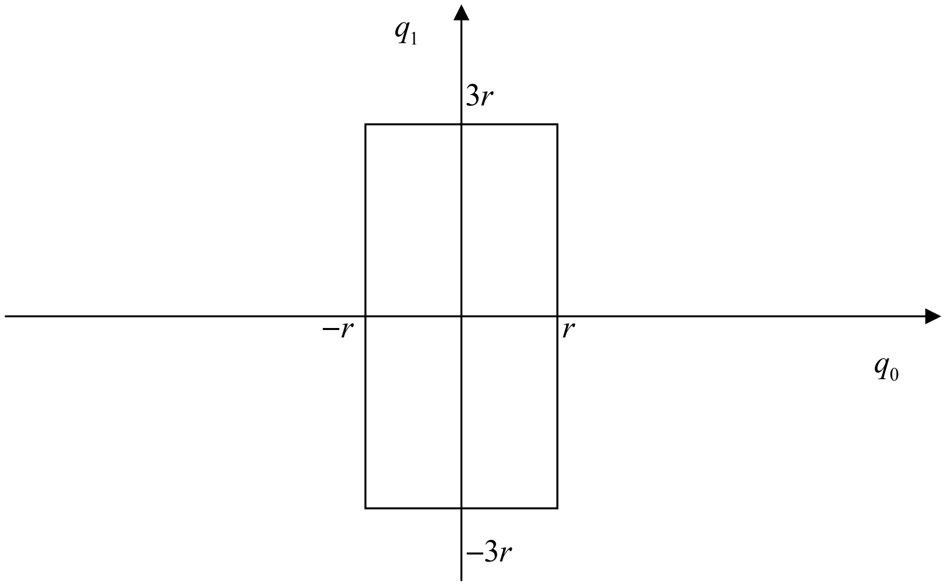
$$P_r = \{p_r(.,q,r) : q \in Q_r\}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Αβέβαιο όριο)

Στο παράδειγμα αυτό θα δείξουμε το σχήμα ενός αβέβαιου ορίου. Έχουμε την παρακάτω πολυωνυμική οικογένεια

$$p_r(s,q) = (s^2 + 10s + 5) + r([-3,3]s + [-1,1])$$

το αβέβαιο όριο Q_r φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Παρατηρούμε ότι τα βάρη $\varepsilon_0 = 1$ και $\varepsilon_1 = 3$ χρησιμοποιούνται για το σχεδιασμό του ορίου Q_r ενώ το διάνυσμα $r \geq 0$ χρησιμοποιείται για μεγέθυνση.

Σημειώνουμε ότι στο θεώρημα των Tsypkin και Polyak (1991) χρησιμοποιείται η νόρμα $\|z\|_\infty$ όπου $z \in C$ και $\|z\|_\infty = \max\{|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z|\}$.

Θεώρημα των Tsypkin και Polyak 1991 (Tsypkin and Polyak 1991): Έχοντας $r \geq 0$ και θεωρώντας P_r την πολυωνυμική οικογένεια με συντελεστές σε διάστημα, με όρια $n \geq 2$, με θετικά βάρη $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}$ και $p_0(s)$ το ευσταθές πολυώνυμο.

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$G_{TP}(\omega) = \frac{\mathrm{Re}\, p_0(j\omega)}{\sum_{i even} \varepsilon_i \omega^i} + j \frac{\mathrm{Im}\, p_0(j\omega)}{\sum_{i odd} \varepsilon_i \omega^i} \quad (4.5.2).$$

Τότε εφαρμόζοντας την μέγιστη νόρμα στο $n \in C$ προκύπτει ότι η οικογένεια P_r είναι εύρωστα ευσταθής αν και μόνο αν

$$|p_0(j0)| > r\varepsilon_0 \quad (4.5.3)$$

και

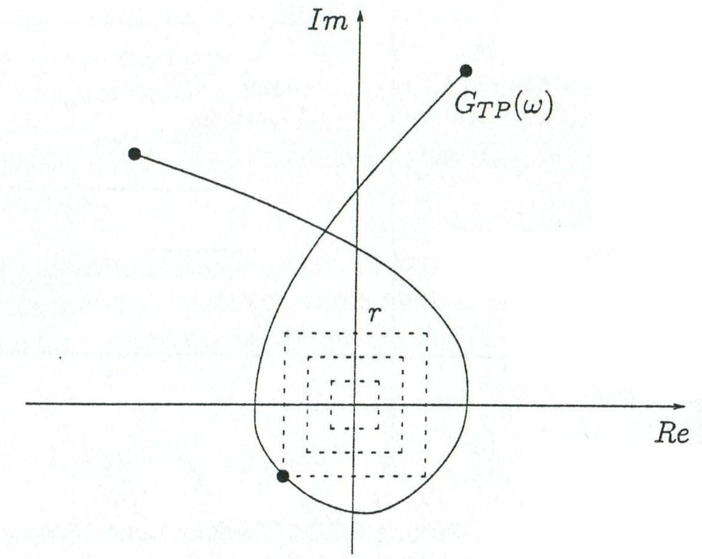
$$\|G_{TP}(\omega)\|_\infty > r \quad (4.5.4)$$

για όλες τις συχνότητες $\omega \geq 0$.

Γραφική οπτικοποίηση (Graphical Visualization) Το θεώρημα των Tsypkin – Polyak προτείνει μια φυσική διαδικασία για την γραφική οπτικοποίηση του εύρωστου ορίου η οποία περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση

$$r_{\max} = \sup\{r : P_r \text{ είναι εύρωστα ευσταθές }\}.$$

Γενικεύουμε το διάγραμμα Nyquist για μιγαδικές συναρτήσεις $G_{TP}(\omega)$ και φανταζόμαστε ένα τετράγωνο το οποίο κεντράρεται όταν $z = 0$ όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα .



Το r είναι η ακτίνα του τετραγώνου η οποία είναι μικρή τόσο ώστε το τετράγωνο να χωράει μέσα στο $G_{TP}(\omega)$ διάγραμμα. Στην συνέχεια επεκτείνουμε το r τόσο ώστε να φτάσουμε στην πρώτη επαφή η οποία φτιάχτηκε από $G_{TP}(\omega)$ διάγραμμα .Σύμφωνα με το θεώρημα των Tsypkin και Polyak (1991) δηλώνουμε την ακτίνα του τετραγώνου η οποία συσχετίζεται με την πρώτη επαφή όπως το $r_{\max}$.Παίρνοντας την μηδενική συχνότητα μέσα στο λογαριασμό για την περίπτωση που το $r_0 = |p_0(j0)|/\varepsilon$ αποκτάμε την σχέση

$$r_{\max} = \min\{r_0, r_{\max}^{+}\}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Εφαρμογή των Tsypkin και Polyak)

Έχουμε την πολυωνυμική οικογένεια P_r που έχει τους συντελεστές της σε διάστημα, η οποία έχει ως κεντρικό πολυώνυμο

$$p_0 = s^6 + 15s^5 + 104s^4 + 420s^3 + 1019s^2 + 1365s + 676$$
$$= (s+1)(s+4)(s+2+3j)(s+2-3j)(s+3+2j)(s+3-2j)$$

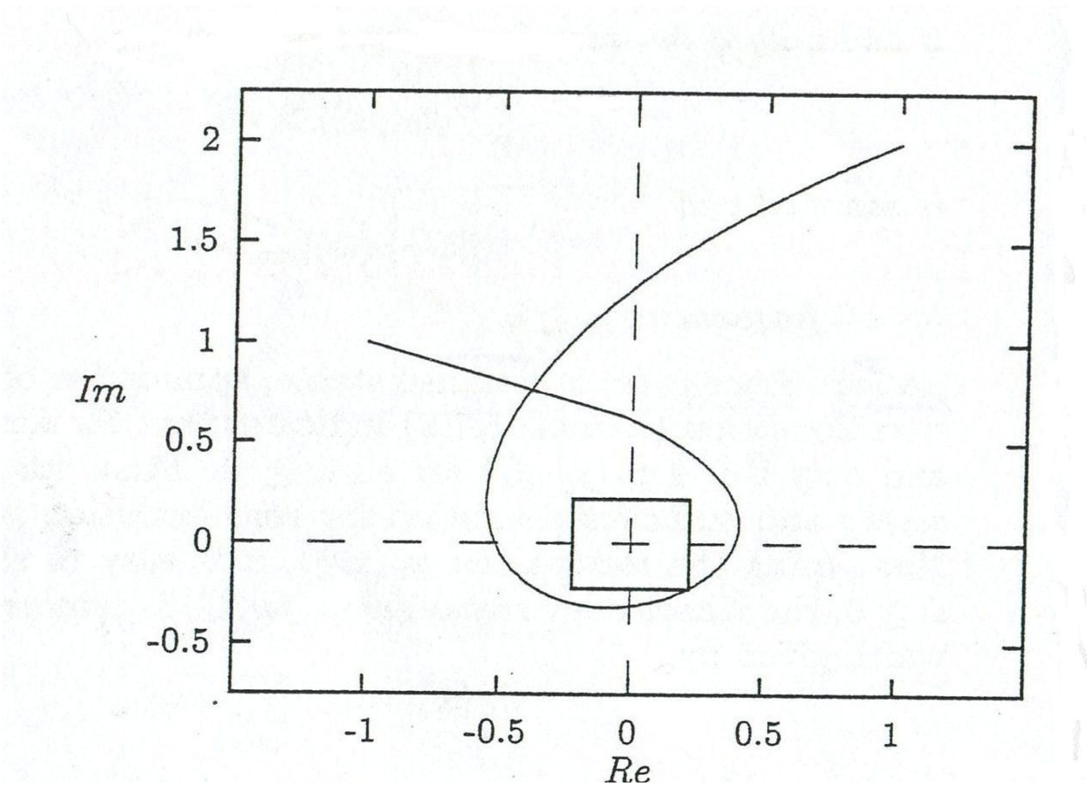
και $\varepsilon_0 = 676, \varepsilon_1 = 682.5, \varepsilon_2 = 509.5, \varepsilon_3 = 210, \varepsilon_4 = 52, \varepsilon_5 = 15$ και $\varepsilon_6 = 1$.

Η συνάρτηση $G_{TP}(\omega)$ που θα σχεδιαστεί είναι η

$$G_{TP}(\omega) = \frac{-\omega^6 + 104\omega^4 - 1019\omega^2 + 676}{\omega^6 + 52\omega^4 + 509.5\omega^2 + 676} + j\frac{15\omega^4 - 420\omega^2 + 1365}{15\omega^4 + 210\omega^2 + 682.5}$$

Βλέποντας το σχέδιο η μέγιστη ακτίνα για την οποία η οικογένεια είναι ευσταθής είναι η $r^+_{\max} \approx 0.2227$ και το $r_{\max} \approx \min\{1, 0.2227\} = 0.2227$.

Το διάγραμμα που προκύπτει είναι το παρακάτω:



4.6 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ KHARITONOV ΓΙΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ.

Δίνεται ένα αβέβαιο πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές. Χρησιμοποιούμε τις πραγματικές αβέβαιες παραμέτρους q_i και r_i για να δηλώσουμε την αβεβαιότητα στο πραγματικό και στο φανταστικό μέρος των συντελεστών του s_i αντιστοίχως και γράφουμε :

$$p(s,q,r) = \sum_{i=0}^{n} (q_i + jr_i)s^i \quad (4.6.1).$$

Τα Q και R είναι τα αβέβαια όρια του q και r . Ειδικότερα ονομάζουμε $P = \{p(.,q,r) : q \in Q; r \in R\}$ την μιγαδική πολυωνυμική οικογένεια όπου οι συντελεστές είναι σε διάστημα (complex coefficient interval polynomial family). Ανάλογα με τους πραγματικούς συντελεστές χρησιμοποιούμε τα όρια $q_i^- \le q_i \le q_i^+$ και $r_i^- \le r_i \le r_i^+$ και το

$$p(s,q,r) = \sum_{i=0}^{n} ([q_i^-, q_i^+] + j[r_i^-, r_i^+])s^i \quad (4.6.2).$$

Σε αντίθετη περίπτωση από τα πραγματικά πολυώνυμα για αποδειχθεί η εύρωστη ευστάθεια των πολυώνυμων που περιέχουν μιγαδικούς συντελεστές απαιτούνται οχτώ πολυώνυμα Kharitonov αντί για τέσσερα . Χρησιμοποιούμε τέσσερα επιπλέον πολυώνυμα Kharitonov γιατί υπάρχει διαφορά ανάμεσα στους πραγματικούς και στους μιγαδικούς συντελεστές .

Η μεγαλύτερη διαφορά στους μιγαδικούς συντελεστές είναι ότι χρειάζεται να μελετήσουμε και για $\omega \ge 0$ και $\omega < 0$ χωριστά. Παρόλα αυτά μπορούμε ακόμα να δουλέψουμε με το τετράγωνο Kharitonov λαμβάνοντας υπόψη την διάκριση ανάμεσα στις κορυφές $\omega < 0$ και $\omega \ge 0$. Επομένως τέσσερα πολυώνυμα Kharitonov χρησιμοποιούνται για $\omega \ge 0$ και άλλα τέσσερα πολυώνυμα Kharitonov για $\omega < 0$.

Πολυώνυμα Kharitonov με μιγαδικούς συντελεστές (Complex Coefficient Kharitonov Polynomials) [6]: Από το μιγαδικό πολυώνυμο με αβεβαιότητα που δίνεται από την σχέση $P(s,q,r) = \sum_{i=0}^{n} (\left[q_i^-, q_i^+\right] + j\left[r_i^-, r_i^+\right])s^i$ προκύπτει ότι υπάρχουν οχτώ σταθερά πολυώνυμα Kharitonov. Τα τέσσερα πρώτα πολυώνυμα ορίζονται για $\omega \ge 0$:

$$K_1(s) = (q_0^- + jr_0^-) + (q_1^- + jr_1^+)s + (q_2^+ + jr_2^+)s^2 + (q_3^+ + jr_3^-)s^3 + \cdots;$$

$$K_2(s) = (q_0^+ + jr_0^+) + (q_1^+ + jr_1^-)s + (q_2^- + jr_2^-)s^2 + (q_3^- + jr_3^+)s^3 + \cdots;$$

$$K_3(s) = (q_0^+ + jr_0^-) + (q_1^- + jr_1^-)s + (q_2^- + jr_2^+)s^2 + (q_3^+ + jr_3^+)s^3 + \cdots;$$

$$K_4(s) = (q_0^- + jr_0^+) + (q_1^+ + jr_1^+)s + (q_2^+ + jr_2^-)s^2 + (q_3^- + jr_3^-)s^3 + \cdots;$$

και για συχνότητες $\omega < 0$ τα επόμενα τέσσερα πολυώνυμα είναι

$$K_1(s) = (q_0^- + jr_0^-) + (q_1^+ + jr_1^-)s + (q_2^+ + jr_2^+)s^2 + (q_3^- + jr_3^+)s^3 + \cdots;$$

$$K_2(s) = (q_0^+ + jr_0^+) + (q_1^- + jr^+)s + (q_2^- + jr_2^-)s^2 + (q_3^+ + jr_3^-)s^3 + \cdots;$$

$$K_3(s) = (q_0^+ + jr_0^-) + (q_1^+ + jr_1^+)s + (q_2^- + jr_2^+)s^2 + (q_3^- + jr_3^-)s^3 + \cdots;$$

$$K_4(s) = (q_0^- + jr_0^+) + (q_1^- + jr_1^-)s + (q_2^+ + jr_2^-)s^2 + (q_3^+ + jr_3^+)s^3 + \cdots;$$

Θεώρημα Kharitonov 1978b (Kharitonov 1978b): Μια πολυωνυμική οικογένεια σταθερού βαθμού με μιγαδικούς συντελεστές σε διάστημα $P = \{P(.,q,r) : q \in Q; r \in R\}$ είναι εύρωστα ευσταθής αν και μόνο αν και τα οχτώ πολυώνυμα Kharitonov είναι ευσταθή.

Κεφάλαιο 5^{ο}

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

5.1 ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ SCILAB.

Το Scilab είναι ένα απλό περιβάλλον προγραμματισμού που επιτρέπει την εύκολη χρήση μαθηματικών συναρτήσεων, στατιστικών μεθόδων και πολλών άλλων αλγορίθμων αριθμητικής ανάλυσης. Από το 1994 ο κώδικας είναι ελεύθερος και μπορεί κάποιος να το βρει στο www.scilab.org. Αυτό ώθησε πολλές ερευνητικές ομάδες να συνεισφέρουν στην ανάπτυξή του. Η γλώσσα προγραμματισμού του Scilab μοιάζει πολύ με αυτή του Matlab.

5.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ KHARITONOV.

Η συνάρτηση $kharitonov\_polynomials(n)$ υπολογίζει τα πολυώνυμα Kharitonov που προκύπτουν από ένα πολυώνυμο που έχει συντελεστές σε διάστημα.

Κώδικας :

```
function p=kharitonov_polynomials(n)

[lhs,rhs]=argn(0);
if rhs>1 then // η συνάρτηση έχει μόνο το 'n' ως όρισμα
  error('function have only one argument')
end;
if type(n)~=1 then // το 'n' πρέπει να είναι πίνακας
  error('argument must be matrix')
end;
if size(n,1)~=2 then //ο πίνακας πρέπει να έχει οπωσδήποτε 2
γραμμές
  error('argument n  must be matrix 2*d')

end;

if and(imag(n)==0) then // ελέγχει αν όλοι οι συντελεστές του
φανταστικού μέρους είναι ίσοι με το μηδέν
     p=kharitonov_poly(n);
else
     p=complex_poly(n);
end

endfunction
```

Επεξήγηση Κώδικα:

Η συνάρτηση $kharitonov\_polynomials(n)$ παίρνει ένα όρισμα την μεταβλητή n η οποία είναι ένα πολυώνυμο του οποίου οι συντελεστές είναι σε διάστημα. Αν το πολυώνυμο δεν έχει μιγαδικούς συντελεστές υπολογίζει τα τέσσερα πολυώνυμα Kharitonov αν όμως έχει υπολογίζει τα οχτώ πολυώνυμα Kharitonov. Στο παράδειγμα μας για να ορίσουμε το διάστημα ορίζουμε την μεταβλητή n ως πίνακα. Ο πίνακας έχει διαστάσεις $2\times d$,η τιμή του d είναι ίση με το βαθμό του πολυωνύμου συν ένα . Στη πρώτη γραμμή του πίνακα είναι τα q_i^- ενώ στην δεύτερη γραμμή τα q_i^+ του πολυωνύμου.

*Παράδειγμα 1^ο^*

Δίνεται το πολυώνυμο:

$$p(s,q)=\left[0.25,1.25\right]s^3+\left[2.75,3.25\right]s^2+\left[0.75,1.25\right]s+\left[0.25,1.25\right].$$

Στην γραμμή εντολών του Scilab πληκτρολογούμε:

```
-->n=[0.25,0.75,2.75,0.25;1.25,1.25,3.25,1.25] //ορίζουμε  τον πίνακα n.
 n  =

    0.25    0.75    2.75    0.25
    1.25    1.25    3.25    1.25
-->kharitonov_polynomials(n) // καλούμε την συνάρτηση
```

Τρέχοντας την εντολή $kharitonov\_polynomials(n)$ τα τέσσερα πολυώνυμα Kharitonov που προκύπτουν είναι τα εξής :

$$K_1(s)=0.25+0.75s+3.25s^2+1.25s^3$$

$$K_2(s)=1.25+1.25s+2.75s^2+0.25s^3$$

$$K_3(s)=1.25+0.75s+2.75s^2+1.25s^3$$

$$K_4(s)=0.25+1.25s+3.25s^2+0.25s^3$$

*Παράδειγμα 2^ο^*

Δίνεται το πολυώνυμο:

$$p(s,q,r)=\left[7+j,8+2j\right]+\left[5+3j,6+4j\right]s+\left[3+5j,4+6j\right]s^2+\left[1+7j,2+8j\right]s^3 \;.$$

Στην γραμμή εντολών του Scilab πληκτρολογούμε:

-->n=[7+%i,5+3*%i,3+5*%i,1+7*%i;8+2*%i,6+4*%i,4+6*%i,2+8*%i] // ορίζουμε τον πίνακα n

n =

7. + i 5. + 3.i 3. + 5.i 1. + 7.i

8. + 2.i 6. + 4.i 4. + 6.i 2. + 8.i

-->kharitonov_polynomials(n) // καλούμε την συνάρτηση

Τρέχοντας την εντολή $kharitonov\_polynomials(n)$ τα οχτώ πολυώνυμα Kharitonov που προκύπτουν είναι τα εξής :

$$K(1) = (7+j)+(5+4j)s+(4+6j)s^2+(2+7j)s^3$$
$$K(2) = (8+2j)+(6+3j)s+(3+5j)s^2+(1+8j)s^3$$
$$K(3) = (8+j)+(5+3j)s+(3+6j)s^2+(2+8j)s^3$$
$$K(4) = (7+2j)+(6+4j)s+(4+5j)s^2+(1+7j)s^3$$

$$K(5) = (7+j)+(6+3j)s+(4+6j)s^2+(1+8j)s^3$$
$$K(6) = (8+2j)+(5+4j)s+(3+5j)s^2+(2+7j)s^3$$
$$K(7) = (8+j)+(6+4j)s+(3+6j)s^2+(1+7j)s^3$$
$$K(8) = (7+2j)+(5+3j)s+(4+5j)s^2+(2+8j)s^3$$

5.3 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΑΠΛΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ KHARITONOV.

Η συνάρτηση $kharitonov\_poly(n)$ υπολογίζει τα τέσσερα απλά (μη μιγαδικά) πολυώνυμα Kharitonov που προκύπτουν από ένα πολυώνυμο που έχει συντελεστές σε διάστημα σύμφωνα με το ορισμό της σελίδας 22 .

Κώδικας :

```
function p=kharitonov_poly(n)

[lhs,rhs]=argn(0);
if rhs>1 then // η συνάρτηση έχει μόνο το 'n' ως όρισμα
  error('function have only one argument')
end;

if type(n)~=1 then // το 'n' πρέπει να είναι πίνακας
```

```
  error('argument  must be matrix')
end;

if size(n,1)~=2 then//ο πίνακας πρέπει να έχει οπωσδήποτε 2 
γραμμές
  error('argument n  must be matrix 2*d')
end;

tmp=size(n)
deg=tmp(1,2)-1 //βρίσκουμε το βαθμό του πολυωνύμου
for i=1:deg+1

  if n(1,i)>n(2,i) then //οι αριθμοί της πρώτης γραμμής πρέπει 
να είναι μικρότεροι από της δεύτερης
    error('number of first row must be smaller than the number 
of the second row ')
  end;

  if n(1,i)<0 | n(2,i)<0 then //οι συντελεστές του σταθερού 
όρου πρέπει να είναι θετικοί
    error('coefficients must be positive')
  end;

end;

s=poly(0,"s")
K1=0,K2=0,K3=0,K4=0
for i=1:deg+1
    mod=modulo ((i-1),4)

    if (mod==0) then  //υπολογίζονται οι συντελεστές των 0,4,8
      K1=K1+s^(i-1)*n(1,i)
      K2=K2+s^(i-1)*n(2,i)
      K3=K3+s^(i-1)*n(2,i)
      K4=K4+s^(i-1)*n(1,i)
    end;
    if (mod==1) then //υπολογίζονται οι συντελεστές των 1,5,9
      K1=K1+s^(i-1)*n(1,i)
      K2=K2+s^(i-1)*n(2,i)
      K3=K3+s^(i-1)*n(1,i)
      K4=K4+s^(i-1)*n(2,i)
    end;
    if (mod==2) then//υπολογίζονται οι συντελεστές του 2,6,10
      K1=K1+s^(i-1)*n(2,i)
      K2=K2+s^(i-1)*n(1,i)
      K3=K3+s^(i-1)*n(1,i)
      K4=K4+s^(i-1)*n(2,i)
    end;
    if (mod==3) then//υπολογίζονται οι συντελεστές του 3,7,11
      K1=K1+s^(i-1)*n(2,i)
      K2=K2+s^(i-1)*n(1,i)
      K3=K3+s^(i-1)*n(2,i)
      K4=K4+s^(i-1)*n(1,i)
    end;
end;
```

```
p=[K1 K2 K3 K4]
endfunction;
```

Επεξήγηση Κώδικα:

Η συνάρτηση $kharitonov\_poly(n)$ παίρνει ένα όρισμα την μεταβλητή n η οποία είναι ένα πολυώνυμο του οποίου οι συντελεστές είναι σε διάστημα και έχει την μορφή $p(s,q)=\sum_{i=0}^{n}\left[q_i^-,q_i^+\right]s^i$. Στο παράδειγμα μας για να ορίσουμε το διάστημα ορίζουμε την μεταβλητή n ως πίνακα. Ο πίνακας έχει διαστάσεις $2\times d$, η τιμή του d είναι ίση με το βαθμό του πολυωνύμου συν ένα. Στη πρώτη γραμμή του πίνακα είναι τα q_i^- ενώ στην δεύτερη γραμμή τα q_i^+ του πολυωνύμου. Το αποτέλεσμα που μας δίνει η συνάρτηση είναι τα τέσσερα πολυώνυμα Kharitonov .

Παράδειγμα

Δίνεται το πολυώνυμο:

$p(s,q)=\left[1,2\right]s^5+\left[3,4\right]s^4+\left[5,6\right]s^3+\left[7,8\right]s^2+\left[9,10\right]s+\left[11,12\right]$.

Στην γραμμή εντολών του Scilab πληκτρολογούμε:

-->n=[11,9,7,5,3,1;12,10,8,6,4,2] //ορίζουμε τον πίνακα n.

n =

11. 9. 7. 5. 3. 1.
12. 10. 8. 6. 4. 2.

-->kharitonov_poly(n) //καλούμε την συνάρτηση

Τρέχοντας την εντολή $kharitonov\_poly(n)$ τα τέσσερα πολυώνυμα Kharitonov που προκύπτουν είναι τα εξής :

$$K_1(s)=11+9s+8s^2+6s^3+3s^4+s^5$$

$$K_2(s)=12+10s+7s^2+5s^3+4s^4+2s^5$$

$$K_3(s)=12+9s+7s^2+6s^3+4s^4+s^5$$

$$K_4(s)=11+10s+8s^2+5s^3+3s^4+2s^5$$

5.4 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ KHARITONOV ΜΕ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ.

Η συνάρτηση $complex\_poly(n)$ υπολογίζει τα οχτώ πολυώνυμα Kharitonov που προκύπτουν από ένα πολυώνυμο που έχει μιγαδικούς συντελεστές σε διάστημα σύμφωνα με τον ορισμό της σελίδας 41 .

Κώδικας :

```
function p=complex_poly(n)

[lhs,rhs]=argn(0);
if rhs>1 then // η συνάρτηση έχει ένα όρισμα
  error('function have only one argument')
end;

if type(n)>1 then // το όρισμα πρέπει να είναι πίνακας
  error('argument must be  matrix')
end;

if size(n,1)~=2 then //ο πίνακας πρέπει να έχει οπωσδήποτε 2
γραμμές
  error('argument n  must be matrix 2*d')
end;


r=real(n)
tmp=size(r)
deg=tmp(1,2)-1
for i=1:deg+1
  if r(1,i)>r(2,i) then
    error('first argument must be smaller than second ')
  end;
end;

r1=kharitonov_poly(r)

im=imag(n)
tmp=size(im)
deg=tmp(1,2)-1
for i=1:deg+1
  if im(1,i)>im(2,i) then
    error('first argument must be smaller than second ')
  end;
end;

im1=kharitonov_poly(im)
p=[r1(1)+im1(4)*%i       r1(2)+im1(3)*%i       r1(3)+im1(1)*%i
r1(4)+im1(2)*%i        r1(4)+im1(1)*%i        r1(3)+im1(2)*%i
r1(2)+im1(4)*%i r1(1)+im1(3)*%i]

endfunction
```

Επεξήγηση Κώδικα:

Η συνάρτηση $complex\_poly(n)$ παίρνει ένα όρισμα την μεταβλητή n η οποία είναι ένα πολυώνυμο του οποίου οι μιγαδικοί συντελεστές είναι σε διάστημα και έχει την μορφή $P(s,q,r)=\sum_{i=0}^{n}(\left[q_i^-,q_i^+\right]+j\left[r_i^-,r_i^+\right])s^i$. Στο παράδειγμα μας για να ορίσουμε το διάστημα ορίζουμε την μεταβλητή n ως πίνακα. Ο πίνακας έχει διαστάσεις $2\times d$, η τιμή του d είναι ίση με το βαθμό του πολυωνύμου συν ένα . Στη πρώτη γραμμή του πίνακα είναι τα q_i^- ενώ στην δεύτερη γραμμή τα q_i^+ του πολυωνύμου .Το αποτέλεσμα που μας δίνει είναι τα οχτώ πολυώνυμα Kharitonov τα οποία προκύπτουν από τον συνδυασμό των τεσσάρων πολυωνύμων Kharitonov .

Παράδειγμα

Δίνεται το πολυώνυμο:

$$p(s,q,r)=\left[0.25+0.20j,0.35+0.28j\right]+\left[0.15+0.37j,0.28+0.39j\right]s$$
$$+\left[0.05+0.82j,0.10+0.93j\right]s^2+\left[0.49+0.35j,0.52+0.43j\right]s^3$$

Στην γραμμή εντολών του Scilab πληκτρολογούμε:

```
-->
n=[0.25+0.20*%i,0.15+0.37*%i,0.05+0.82*%i,0.49+0.35*%iq0.35+0.28*%i,0.28+0.
39*%i,0.10+0.93*%i,0.52+0.43*%i] //ορίζουμε τον πίνακα n
 n  =

   0.25 + 0.2i     0.15 + 0.37i    0.05 + 0.82i    0.49 + 0.35i
   0.35 + 0.28i    0.28 + 0.39i    0.1 + 0.93i     0.52 + 0.43i
-->complex_poly(n) //καλούμε την συνάρτηση
```

Τρέχοντας την εντολή $complex\_poly(n)$ τα οχτώ πολυώνυμα Kharitonov που προκύπτουν είναι τα εξής :

$$K(1)=(0.25+0.20j)+(0.15+0.39j)s+(0.10+0.93j)s^2+(0.52+0.35j)s^3$$
$$K(2)=(0.35+0.28j)+(0.28+0.37j)s+(0.05+0.82j)s^2+(0.49+0.43j)s^3$$
$$K(3)=(0.35+0.20j)+(0.15+0.37j)s+(0.05+0.93j)s^2+(0.52+0.43j)s^3$$
$$K(4)=(0.25+0.28j)+(0.28+0.39j)s+(0.10+0.82j)s^2+(0.49+0.35j)s^3$$

$$K(5) = (0.25 + 0.20j) + (0.28 + 0.37j)s + (0.10 + 0.93j)s^2 + (0.49 + 0.43j)s^3$$
$$K(6) = (0.35 + 0.28j) + (0.15 + 0.39j)s + (0.05 + 0.82j)s^2 + (0.52 + 0.35j)s^3$$
$$K(7) = (0.35 + 0.20j) + (0.28 + 0.39j)s + (0.05 + 0.93j)s^2 + (0.49 + 0.35j)s^3$$
$$K(8) = (0.25 + 0.28j) + (0.15 + 0.37j)s + (0.10 + 0.82j)s^2 + (0.52 + 0.43j)s^3$$

5.5 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΛΕΓΧΟΥ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ KHARITONOV.

Η συνάρτηση $k\_isstable(n)$ ελέγχει αν ένα πολυώνυμο με συντελεστές σε διάστημα είναι ευσταθές.

Κώδικας :

```
function tmp=k_isstable(n)

[lhs,rhs]=argn(0);
if rhs>1 then // η συνάρτηση έχει μόνο ένα όρισμα
  error('function have only one argument')
end;

if type(n)~=1 then // το όρισμα πρέπει να είναι πίνακας
    error('argument must be real or complex matrix')
end

if size(n,1)~=2 then//ο πίνακας πρέπει να έχει οπωσδήποτε 2
γραμμές
  error('argument n  must be matrix 2*d')
end;

if and(imag(n)==0) then // ελέγχει αν το φανταστικό μέρος του
'n' είναι ισο με το μηδέν
     p=kharitonov_poly(n);
     tmp=%T;
     tmp1=%T;
     for i=1:4
        tmp=tmp & and(coeff(p(1,i))>0); // οι συντελεστές του
πολυωνύμου πρέπει να είναι θετικοί
        l=routh_t(p(1,i));
        td=size(l);
        tmp1=tmp1 & and(l(1:td(1),1)>0); // η πρώτη στήλη του
πίνακα Routh να είναι θετική
     end
  else
    p=complex_poly(n);
    tmp=%T;
    tmp1=%T;
    for i=1:8
        tmp1=tmp1 & and(real(roots(p(1,i)))<0); //οι ρίζες των
πολυωνύμων του πραγματικού μέλους είναι μικρότερες  του μηδέν
    end
  end
```

```
tmp = tmp & tmp1
endfunction
```

Επεξήγηση Κώδικα:

Η συνάρτηση $k\_isstable(n)$ παίρνει ένα όρισμα την μεταβλητή n η οποία είναι ένα πολυώνυμο του οποίου οι συντελεστές είναι σε διάστημα. Στο παράδειγμα μας για να ορίσουμε το διάστημα ορίζουμε την μεταβλητή n ως πίνακα. Ο πίνακας έχει διαστάσεις $2\times d$, η τιμή του d είναι ίση με το βαθμό του πολυωνύμου συν ένα . Στη πρώτη γραμμή του πίνακα είναι τα q_i^- ενώ στην δεύτερη γραμμή τα q_i^+ . Βασικός έλεγχος που γίνεται είναι αν το πολυώνυμο που δώσαμε έχει μιγαδικούς συντελεστές ή όχι . Επιστρέφει την μεταβλητή $\text{true}(T)$ αν πράγματι το πολυώνυμο είναι ευσταθές ή $\text{false}(F)$ αν δεν είναι.

Παράδειγμα 1ο

Δίνεται το πολυώνυμο:

$$p(s,q)=\left[0.25,1.25\right]s^3+\left[2.75,3.25\right]s^2+\left[0.75,1.25\right]s+\left[0.25,1.25\right].$$

Στην γραμμή εντολών του Scilab πληκτρολογούμε:

```
-->n=[0.25,0.75,2.75,0.25;1.25,1.25,3.25,1.25] //ορίζουμε τον πίνακα n
 n =

   0.25   0.75   2.75   0.25
   1.25   1.25   3.25   1.25
-->k_isstable(n) //καλούμε την συνάρτηση
```

Τρέχοντας την εντολή $k\_isstable(n)$ το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι T άρα το πολυώνυμο είναι ευσταθές .

Παράδειγμα 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο:

$$p(s,q)=\left[1,2\right]s^5+\left[3,4\right]s^4+\left[5,6\right]s^3+\left[7,8\right]s^2+\left[9,10\right]s+\left[11,12\right].$$

Στην γραμμή εντολών του Scilab πληκτρολογούμε:

```
-->n=[11,9,7,5,3,1;12,10,8,6,4,2] //ορίζουμε τον πίνακα n
```

n =

11. 9. 7. 5. 3. 1.
12. 10. 8. 6. 4. 2.

-->k_isstable(n) //καλούμε την συνάρτηση

Τρέχοντας την εντολή $k\_isstable(n)$ το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι F άρα το πολυώνυμο δεν είναι ευσταθές .

Παράδειγμα 3^o

Δίνεται το πολυώνυμο:

$$p(s,q,r) = \left[7+j, 8+2j\right] + \left[5+3j, 6+4j\right]s + \left[3+5j, 4+6j\right]s^2 + \left[1+7j, 2+8j\right]s^3$$

Στην γραμμή εντολών του Scilab πληκτρολογούμε:

-->n=[7+%i,5+3*%i,3+5*%i,1+7*%i;8+2*%i,6+4*%i,4+6*%i,2+8*%i] //ορίζουμε τον πίνακα n

n =

7. + i 5. + 3.i 3. + 5.i 1. + 7.i
8. + 2.i 6. + 4.i 4. + 6.i 2. + 8.i

-->k_isstable(n) // καλούμε την συνάρτηση

Τρέχοντας την εντολή $k\_isstable(n)$ το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι F άρα το πολυώνυμο δεν είναι ευσταθές .

Παράδειγμα 4^o

Δίνεται το πολυώνυμο:

$$p(s,q,r) = \left[0.25+0.20j, 0.35+0.28j\right] + \left[0.15+0.37j, 0.28+0.39j\right]s$$
$$+\left[0.05+0.82j, 0.10+0.93j\right]s^2 + \left[0.49+0.35j, 0.52+0.43j\right]s^3$$

Στην γραμμή εντολών του Scilab πληκτρολογούμε:

-->
n=[0.25+0.20*%i,0.15+0.37*%i,0.05+0.82*%i,0.49+0.35*%i;0.35+0.28*%i,0.28+0.39*%i,0.10+0.93*%i,0.52+0.43*%i] //ορίζουμε τον πίνακα n

n =

0.25 + 0.2i 0.15 + 0.37i 0.05 + 0.82i 0.49 + 0.35i
0.35 + 0.28i 0.28 + 0.39i 0.1 + 0.93i 0.52 + 0.43i

-->k_isstable(n) //καλούμε την συνάρτηση

Εκτελώντας την εντολή $k\_isstable(n)$ το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι F άρα το πολυώνυμο δεν είναι ευσταθές .

5.6 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ KHARITONOV ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΚΙΝΗΣΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ.

Η συνάρτηση $k\_rectangle(n, stp, wc)$ σχεδιάζει το τετράγωνο του Kharitonov καθώς επίσης πραγματοποιεί και την κίνηση του τετραγώνου μέχρι αυτό να φτάσει στην συχνότητα αποκοπής ω_c .

Κώδικας :

```
function tmp=k_rectangle(n,stp,wc)

[lhs,rhs]=argn(0);
if rhs>3 then //η συνάρτηση έχει τρία ορίσματα
  error('function have only three argument')
end;

if rhs<2 then
  error ('function need at least two argument to run')
end;

if rhs==2 then
  sz=size(n)
  sz=sz(2)
  if n(1,sz)>0 then
    wc=(max(n(2,1:sz-1))/n(1,sz))+1  // υπολογίζει το ωc με
βάση τον τύπο (3.7.4) της σελίδας 26
  else
    error('qn must be positive')
  end
end;

if type(n)~=1 then // το όρισμα 'n' είναι πίνακας
  error('first argument must be matrix')
end;

if type(stp)~=1 then // το όρισμα 'stp' είναι αριθμός
  error('argument stp must be number ')
end;

if type(wc)~=1 then // το όρισμα 'wc' είναι αριθμός
  error('argument wc must be number ')
end;

p=kharitonov_poly(n)

plot2d([-10,20],[-10,10],[-1,-1],"033"); //ανοίγει το παράθυρο
σχεδιασμού
xmin=0;
xmax=0;
```

```
ymin=0;
ymax=0;

for j=0:stp:wc
tmp=horner(p,%i*j); // υπολογίζει την τιμή του p στο σημείο (j,i)
x=real(tmp(1,1));
y=imag(tmp(1,4));
w=real(tmp(1,2))-real(tmp(1,1));
h=imag(tmp(1,4))-imag(tmp(1,3));
xmin=min(x,xmin);
xmax=max(xmax,x+w);
ymin=min(ymin,y-h);
ymax=max(ymax,y);
xrect(x,y,w,h);
end

plot2d([xmin,xmax],[ymin,ymax],[-1,-1],"033"); //σχεδιάζει το τετράγωνο

xgrid(3);

endfunction
```

Επεξήγηση Κώδικα:

Η συνάρτηση παίρνει τρία ορίσματα τις μεταβλητές n, stp και wc. Η μεταβλητή n είναι ένα πολυώνυμο του οποίου οι συντελεστές είναι σε διάστημα και έχει την μορφή $p(s,q)=\sum_{i=0}^{n}\left[q_i^-,q_i^+\right]s^i$. Στο παράδειγμα μας για να ορίσουμε το διάστημα ορίζουμε την μεταβλητή n ως πίνακα. Ο πίνακας έχει διαστάσεις $2\times d$, η τιμή του d είναι ίση με το βαθμό του πολυωνύμου συν ένα . Στη πρώτη γραμμή του πίνακα είναι τα q_i^- ενώ στην δεύτερη γραμμή τα q_i^+ . Η μεταβλητή stp είναι το βήμα με το οποίο θα κινείτε το τετράγωνο και τέλος η μεταβλητή wc είναι η συχνότητα αποκοπής δηλαδή το σημείο μέχρι το οποίο θα κινείται το τετράγωνο. Η συχνότητα wc δίνεται από τον τύπο (3.7.4) της σελίδας 28. Το αποτέλεσμα που μας δίνει είναι ένα γράφημα που δείχνει το τετράγωνο να κινείται.

Υπάρχουν δύο τρόποι για να τρέξει η συνάρτηση ο πρώτος είναι να δώσουμε εμείς μια τιμή στην συχνότητα αποκοπής wc και ο δεύτερος είναι να αφήσουμε στην συνάρτηση να υπολογίσει μονή της την συχνότητα αποκοπής wc .

Παράδειγμα 1^o

Δίνεται το πολυώνυμο:

$p(s,q)=[0.25,1.25]s^3+[2.75,3.25]s^2+[0.75,1.25]s+[0.25,1.25]$.

Στην γραμμή εντολών του Scilab πληκτρολογούμε:

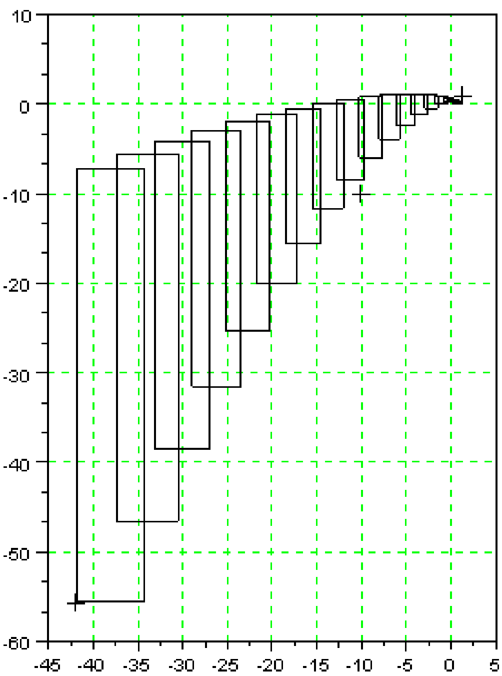
-->n=[0.25,0.75,2.75,0.25;1.25,1.25,3.25,1.25] //ορίζουμε τον πίνακα n

n =

0.25	0.75	2.75	0.25
1.25	1.25	3.25	1.25

-->k_rectangle(n,0.2) // καλούμε την συνάρτηση

Εκτελώντας την εντολή $k\_rectangle(n,0.2)$ προκύπτει το παρακάτω σχήμα. Η συνάρτηση υπολογίζει μόνη την τιμή της συχνότητας wc.



Παράδειγμα 2^o

Δίνεται το πολυώνυμο:

$p(s,q)=[0.25,1.25]s^3+[2.75,3.25]s^2+[0.75,1.25]s+[0.25,1.25]$.

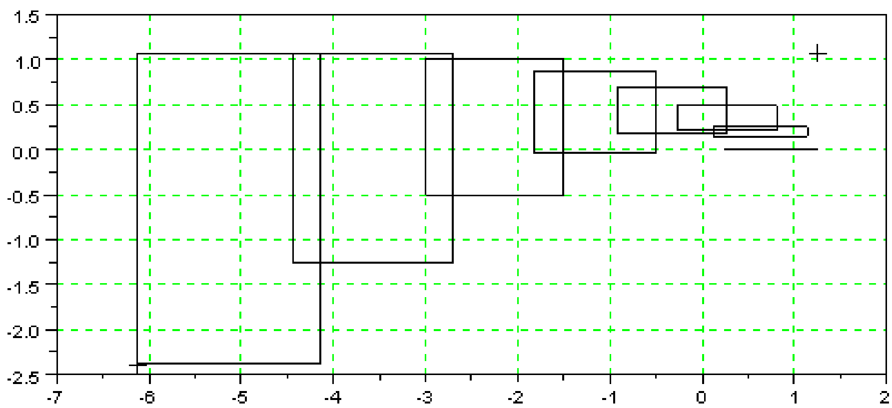
Στην γραμμή εντολών του Scilab πληκτρολογούμε:

-->n=[0.25,0.75,2.75,0.25;1.25,1.25,3.25,1.25] //ορίζουμε τον πίνακα n n =

0.25	0.75	2.75	0.25
1.25	1.25	3.25	1.25

-->k_rectangle(n,0.2,1.4) // καλούμε την συνάρτηση

Εκτελώντας την εντολή $k\_rec\tan gle(n, 0.2, 1.4)$ προκύπτει το παρακάτω σχήμα.



5.7 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ HURWITZ.

Η συνάρτηση $hurwitz\_matrix(p, n1)$ υπολογίζει τον πίνακα Hurwitz ενός πολυωνύμου με βάση τον ορισμό της σελίδας 15 .

Κώδικας :

```
function ans=hurwitz_matrix(p,n1)

[lhs,rhs]=argn(0);
if rhs>2 then //η συνάρτηση έχει δυο ορίσματα
  error('function needs only two argument to run')
end;

if type(p)~=2 then // το  'p' είναι πολυώνυμο
  error('argument must be polynomial')
end;
```

```
if type(n1)~=1 then // το  'n1' πρέπει να ειναι νούμερο
  error('argument n1 must be number')
end;

ans=[];
tmp=[];

if rhs==2 then
  n=n1
else
  n=degree(p);
end

//We delete the following check, which although it is in the
theorem, it stops the function from working for theorem 4.7.6
in Barmish
//if coeff(p,n)<=0 then
//  error('coefficient  an must be positive')
//end;

for i=1:n
      tmp=[];
      ind=n-2+i;
      for j=1:n
            cj=ind-(j-1)*2;
            if cj>=0 then
                  tmp=[tmp,coeff(p,cj)];
            else
                  tmp=[tmp,0];
            end
      end
      ans=[ans;tmp]
end

endfunction
```

Επεξήγηση Κώδικα:

Η συνάρτηση $hurwitz\_matrix(p,n1)$ παίρνει δύο ορίσματα την μεταβλητή p η οποία είναι ένα πολυώνυμο που έχει την μορφή $p(s)=a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots\cdots+a_1s+a_0$ όπου $a_n>0$ και την μεταβλητή $n1$ η οποία νούμερο. Όταν δεν δίνουμε τιμή στο n1 η συνάρτηση ορίζει βαθμό πολυωνύμου το βαθμό που έχει το πολυώνυμο p(s). Αν βάλουμε τιμή στο n1 ο βαθμός του πολυωνύμου παίρνει την τιμή που ορίσαμε εμείς .Το αποτέλεσμα που μας δίνει είναι ο πίνακας Hurwitz .

Παράδειγμα 1ο

Δίνεται το πολυώνυμο:

$p(s)=7s^5+6s^4+5s^3+4s^2+3s+2$

Στην γραμμή εντολών του Scilab πληκτρολογούμε:

-->s=poly(0,'s') // ορίζουμε την μεταβλητή

-->p=7*s^5+6*s^4+5*s^3+4*s^2+3*s+2 // ορίζουμε το πολυώνυμο

p

-->hurwitz_matrix(p) //καλούμε την συνάρτηση

Εκτελώντας την εντολή $hurwitz\_matrix(p)$ ο πίνακας Hurwitz του πολυωνύμου είναι ο εξής :

$$H(p)=\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

*Παράδειγμα 2^ο^*

Δίνεται το πολυώνυμο:

$p(s)=2.32s^5+5.21s^4+6.25s^3+1.23s^2+7.45s+4.27$

Στην γραμμή εντολών του Scilab πληκτρολογούμε:

-->s=poly(0,'s') // ορίζουμε την μεταβλητή s

-->p=2.32*s^5+5.21*s^4+6.25*s^3+1.23*s^2+7.45*s+4.27// ορίζουμε το πολυώνυμο p

-->hurwitz_matrix(p) //καλούμε την συνάρτηση

Εκτελώντας την εντολή $hurwitz\_matrix(p)$ ο πίνακας Hurwitz του πολυωνύμου είναι ο εξής :

$$H(p)=\begin{bmatrix} 5.21 & 1.23 & 4.27 & 0 & 0 \\ 2.32 & 6.25 & 7.45 & 0 & 0 \\ 0 & 5.21 & 1.23 & 4.27 & 0 \\ 0 & 2.32 & 6.25 & 7.45 & 0 \\ 0 & 0 & 5.21 & 1.23 & 4.27 \end{bmatrix}$$

*Παράδειγμα 3^ο^*

Δίνεται το πολυώνυμο:

$p(s)=32s^5+21s^4+25s^3+13s^2+45s+42$

Στην γραμμή εντολών του Scilab πληκτρολογούμε:

-->s=poly(0,'s') // ορίζουμε την μεταβλητή s

-->p=32*s^5+21*s^4+25*s^3+13*s^2+45*s+42// ορίζουμε το πολυώνυμο

-->hurwitz_matrix(p,9) //καλούμε την συνάρτηση

Εκτελώντας την εντολή $hurwitz\_matrix(p,9)$ ο πίνακας Hurwitz του πολυωνύμου είναι ο εξής :

$$H(p)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 21 & 13 & 42 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 25 & 45 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 13 & 42 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & 25 & 45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 13 & 42 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & 25 & 45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 13 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & 25 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 13 & 42 \end{bmatrix}$$

5.8 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΟΝ ΠΙΝΑΚΑ HURWITZ.

Η συνάρτηση $\max imal\_\mathrm{int}\,erval(p0,p1)$ υπολογίζει τα όρια $q^{+}_{\max}$ και $q^{-}_{\min}$ του πολυωνύμου $p(s,q)=p_0(s)+qp_1(s)$ σύμφωνα με το κριτήριο των ιδιοτιμών της σελίδας 16 .

Κώδικας :

```
function tmp=maximal_interval(p0,p1)

[lhs,rhs]=argn(0);
if rhs>2 |rhs<2 then // η συνάρτηση έχει μόνο δυο ορίσματα
  error('function needs only two arguments to run')
end;

if type(p0)~=2 |type(p1)~=2 then //  τα 'p0'και'p1'πρέπει να είναι πολυώνυμα
  error('argument must be polynomial')
end;

if degree(p0)<degree(p1) then // το πολυώνυμο 'p0' έχει μεγαλύτερο βαθμό από το 'p1'
  error('degree po(s) > degree p1(s)')
end;

tm=%T
tm1=%T
tm=tm & and (coeff(p0)>0) //οι συντελεστές του πολυωνύμου πρέπει να είναι θετικοί
l=routh_t(p0)
```

```
td=size(l)
tm1=tm1  &  and  (l(1:td(1),1)>0)//  η  πρώτη  στήλη  του  πίνακα
Routh πρέπει να είναι θετική
tm=tm & tm1
if tm =%F then // το πολυώνυμο 'p0' πρέπει να είναι ευσταθές
  error('polynomial p0 must be stable')
end;

p00=hurwitz_matrix(p0)
p10=hurwitz_matrix(p1,degree(p0))
  eig=spec((-p00^-1)*p10)   //  υπολογίζει  την  ιδιοτιμή  του
πίνακα
  maxeig = 0.0000001;
  mineig = -0.0000001;
  for j=1:length(eig)
    if (imag(eig(j))==0) then
      maxeig=max(maxeig,real(eig(j)))
      mineig=min(mineig,real(eig(j)))
    end;
end;

  tmp=[1/maxeig 1/mineig]

if maxeig==0.0000001 then
  tmp(1)=%inf
end;
if mineig==-0.0000001 then
  tmp(2)=-%inf
end;

endfunction
```

Επεξήγηση Κώδικα:

Η συνάρτηση $\max imal\_\text{int}\, erval(p0, p1)$ παίρνει δύο ορίσματα τα πολυώνυμα p_0 και p_1 που έχουν την μορφή $p(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 s + a_0$. Το αποτέλεσμα που μας επιστρέφει είναι το μέγιστο διάστημα το οποίο δίνεται από τα όρια $q^+_{\max}$ και $q^-_{\min}$.

Παράδειγμα 1ο

Δίνονται τα πολυώνυμα $p_0 = s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24$ και $p_1 = 7s^3 + 5s^2 + 3s + 8$.
Στην γραμμή εντολών του Scilab πληκτρολογούμε:

-->s=poly(0,'s') // ορίζουμε την μεταβλητή s

-->p0=s^4+10*s^3+35*s^2+50*s+24 // ορίζουμε το πολυώνυμο ρ0

-->p1=7*s^3+5*s^2+3*s+8// ορίζουμε το πολυώνυμο ρ1

-->maximal_interval(p0,p1)// καλούμε την συνάρτηση

Εκτελώντας την $\max imal\_ \operatorname{int} erval(p0, p1)$ προκύπτει ότι $q^{+}_{\max} = 7.3440126$ και $q^{-}_{\min} = -1.1960419$.

*Παράδειγμα 2^ο^*

Δίνονται τα πολυώνυμα $p_0 = s^5 + 3s^4 + 7s^3 + 20s^2 + 6s + 15$ και $p_1 = 21.7s^4 + 2.6s^3 + 8.3s^2 + 11.3s + 3.9$

Στην γραμμή εντολών του Scilab πληκτρολογούμε:

-->p0=s^5+3*s^4+7*s^3+20*s^2+6*s+15// ορίζουμε το πολυώνυμο

-->p1=21.7*s^4+2.6*s^3+8.3*s^2+11.3*s+3.9 // ορίζουμε το πολυώνυμο

-->maximal_interval(p0,p1) //καλούμε την συνάρτηση

Εκτελώντας την $\max imal\_ \operatorname{int} erval(p0, p1)$ προκύπτει ότι $q^{+}_{\max} = 0.2019661$ και $q^{-}_{\min} = -0.0040098$.

5.9 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ $Q^{+}_{\max}$ ΚΑΙ $Q^{-}_{\min}$ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ KRONECKER.

Η συνάρτηση $q\max\_q\min(A_{0,} A_1)$ υπολογίζει τα όρια $q^{+}_{\max}$ και $q^{-}_{\min}$ με βάση τις πράξεις Kronecher σύμφωνα με το ορισμό της σελίδας 19.

Κώδικας :

```
function tmp=qmax_qmin(Ao,A1)

[lhs,rhs]=argn(0);
if rhs>2 | rhs <2 then // η συνάρτηση έχει δύο ορίσματα
  error('function needs only two argument to run')
end;

if type(Ao)<>1 | type(A1)<>1  then // τα δυο ορίσματα είναι πίνακες
  error('arguments must be matrix')
end;

if size(Ao)<> size(A1) then //οι πίνακες πρέπει να έχουν το ίδιο μέγεθος
  error('matrix have same size')
end;

  eig=spec(-(kronsum(Ao,Ao)^-1*kronsum(A1,A1))) // υπολογίζει τις ιδιοτιμές του πίνακα με βάση των πράξεων Kronecker
  maxeig=0.0000001
  mineig=-0.000001
  for j=1:length(eig)
    if (imag(eig(j))==0) then
      maxeig=max(maxeig,real(eig(j)))
```

```
        mineig=min(mineig,real(eig(j)))
     end;
end;

  tmp=[1/maxeig 1/mineig]

if maxeig=0.0000001 then
  tmp(1)=%inf
end;
if mineig=-0.0000001 then
  tmp(2)=-%inf
end;

endfunction
```

Επεξήγηση Κώδικα:

Η συνάρτηση παίρνει δύο ορίσματα τους τετραγωνικούς πίνακες A_0 και A_1,οι οποίοι έχουν τις ίδιες διαστάσεις . Το αποτέλεσμα που μας επιστρέφει είναι τα όρια $q^+_{\max}$ και $q^-_{\min}$.

Παράδειγμα 1ο

Δίνονται οι παρακάτω πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 17 & 6 \\ 16 & 21 & 6 & 3 \\ 8 & 14 & 18 & 9 \\ 22 & 3 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad A_0 = \begin{bmatrix} 27 & 3 & 11 & 9 \\ 9 & 31 & 16 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 19 \\ 6 & 11 & 23 & 4 \end{bmatrix}$$

Στην γραμμή εντολών του Scilab πληκτρολογούμε:

```
-->A1=[7 5 17 6;16 21 6 3;8 14 18 9;22 3 8 9]// ορίζουμε τον πίνακα A1
A1  =

   7.    5.    17.   6.
   16.   21.   6.    3.
   8.    14.   18.   9.
   22.   3.    8.    9.

-->Ao=[27 3 11 9;9 31 16 2;9 7 8 19;6 11 23 4]// ορίζουμε τον πίνακα Ao
Ao  =

   27.   3.    11.   9.
   9.    31.   16.   2.
   9.    7.    8.    19.
   6.    11.   23.   4.
-->qmax_qmin(Ao,A1)// καλούμε την συνάρτηση
```

Εκτελώντας την συνάρτηση $q\max\_q\min(A_{0,}A_1)$ το αποτέλεσμα που μας δίνει είναι $q^+_{\max} = 0.1640732$ και $q^-_{\min} = -0.8332855$.

Παράδειγμα 2ο

Δίνονται οι παρακάτω πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 73 & 67 & 34 \\ 15 & 27 & 89 \\ 42 & 71 & 68 \end{bmatrix} \qquad A_0 = \begin{bmatrix} 17 & 34 & 25 \\ 43 & 78 & 95 \\ 53 & 72 & 16 \end{bmatrix}$$

Στην γραμμή εντολών του Scilab πληκτρολογούμε:

```
-->A1=[73 67 34;15 27 89;42 71 68] //ορίζουμε τον πίνακα A1
 A1  =

   73.   67.   34.
   15.   27.   89.
   42.   71.   68.

-->Ao=[17 34 25;43 78 95;53 72 16] //ορίζουμε τον πίνακα Ao
 Ao  =

   17.   34.   25.
   43.   78.   95.
   53.   72.   16.

-->tmp=qmax_qmin(Ao,A1)//καλούμε την συνάρτηση
```

Εκτελώντας την συνάρτηση $q\max\_q\min(A_{0,}A_1)$ το αποτέλεσμα που μας δίνει είναι $q^+_{\max} = 0.1881013$ και $q^-_{\min} = -1000000$.

5.10 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ KRONECHER

Η συνάρτηση kronsum(a,b) υπολογίζει το άθροισμα Kronecher με τον τύπο (2.6.4) της σελίδας 18.

Κώδικας:

```
function pin=kronsum(a,b)

[xa,ya]=size(a)
[xb,yb]=size(b)

[lhs,rhs]=argn(0);
if rhs>2 | rhs <2 then // η συνάρτηση έχει δύο ορίσματα
  error('function needs only two argument to run')
end;
```

```
if  type(a)<>1  |  type(b)<>1   then // τα δυο ορίσματα είναι
πίνακες
  error('arguments must be matrix')
end;

if  [xa]<>[ya]  |  [xb]  <>[yb]  then // τα δυο ορίσματα είναι
τετραγωνικοί πίνακες
  error('arguments must be square matrix')
end;

if size(a)<> size(b) then //οι πίνακες έχουν το ίδιο μέγεθος
  error('matrix must have the same size')
end;

pin=kron(a,eye(yb,yb))+kron(eye(ya,ya),b)

endfunction
```

Επεξήγηση Κώδικα:

Η συνάρτηση παίρνει δύο ορίσματα τις μεταβλητές a και b, τα οποία είναι τετραγωνικοί πίνακες ίδιου μεγέθους. Το αποτέλεσμα που μας επιστρέφει είναι τα άθροισμα Kronecher.

Παράδειγμα 1ο

Δίνονται οι παρακάτω πίνακες

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Στην γραμμή εντολών του Scilab πληκτρολογούμε:

-->a=[1 2;3 4]// ορίζουμε τον πίνακα a

-->b=[5 6;7 8]// ορίζουμε τον πίνακα b

-->kronsum(a,b)// καλούμε την συνάρτηση

Εκτελώντας την συνάρτηση kronsum(a,b) το αποτέλεσμα που μας δίνει είναι

$$(a \oplus b) = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 2 & 0 \\ 7 & 9 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 3 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2ο

Δίνονται οι παρακάτω πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 5 & 2 & 9 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix} \qquad A_0 = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 4 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Στην γραμμή εντολών του Scilab πληκτρολογούμε:

-->A1=[7 6 4;5 2 9;3 5 8] //ορίζουμε τον πίνακα A1

-->Ao=[7 3 5;4 8 9;6 2 1] //ορίζουμε τον πίνακα Ao

-->kronsum(Ao,A1)//καλούμε την συνάρτηση

Εκτελώντας την συνάρτηση $\text{kronsum}(A_0,A_1)$ το αποτέλεσμα που μας δίνει είναι.

$$(A_0 \oplus A_1) = \begin{bmatrix} 14 & 6 & 4 & 3 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 9 & 0 & 3 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 15 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & 15 & 6 & 4 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 10 & 9 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 5 & 16 & 0 & 0 & 9 \\ 6 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 8 & 6 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 2 & 0 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 2 & 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

5.11 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ $r_{\max}$.

Η συνάρτηση rmax(n,p0) υπολογίζει το $r_{\max}$ σύμφωνα με τον τύπο (3.6.2) της σελίδας 27.

Κώδικας :

```
function r=rmax(n,p0)

[lhs,rhs]=argn(0);
if rhs>2 then // η συνάρτηση έχει ορίσματα τον πίνακα 'n' και
το πολυώνυμο 'p0'
  error('function have only two argument')
end;

if type(n)~=1 then // το 'n' πρέπει να είναι πίνακας
  error('argument n must be matrix')
end;

if type(p0)~=2 then // το 'p0' πρέπει να είναι πολυώνυμο
  error('argument p0 must be polynomial')
end;

if size(n,1)~=2 then  //ο πίνακας πρέπει να έχει οπωσδήποτε 2
γραμμές
```

```
  error('argument n  must be matrix 2*d')
end;

tmp=size(n)
vath=tmp(1,2)-1 // υπολογίζει το βαθμό του πίνακα
for i=1:vath+1
  if n(1,i)>n(2,i) then
    error('first argument must be smaller than second')
  end;
end;

s=poly(0,"s")
p1=0,p2=0,p3=0,p4=0
for i=1:vath+1
    mod=modulo ((i-1),4)

    if (mod==0) then  //υπολογίζονται οι συντελεστές των 0,4,8
      p1=p1+s^(i-1)*n(1,i)
      p2=p2+s^(i-1)*n(2,i)
      p3=p3+s^(i-1)*n(2,i)
      p4=p4+s^(i-1)*n(1,i)
    end;
    if (mod==1) then //υπολογίζονται οι συντελεστές των 1,5,9
      p1=p1+s^(i-1)*n(1,i)
      p2=p2+s^(i-1)*n(2,i)
      p3=p3+s^(i-1)*n(1,i)
      p4=p4+s^(i-1)*n(2,i)
    end;
    if (mod==2) then //υπολογίζονται οι συντελεστές των 2,6,10
      p1=p1+s^(i-1)*n(2,i)
      p2=p2+s^(i-1)*n(1,i)
      p3=p3+s^(i-1)*n(1,i)
      p4=p4+s^(i-1)*n(2,i)
    end;
    if (mod==3) then //υπολογίζονται οι συντελεστές των 3,7,11
      p1=p1+s^(i-1)*n(2,i)
      p2=p2+s^(i-1)*n(1,i)
      p3=p3+s^(i-1)*n(2,i)
      p4=p4+s^(i-1)*n(1,i)
    end;
end;

[p1 p2 p3 p4]

l1=maximal_interval(p0,p1)
l1=l1(1)
l2=maximal_interval(p0,p2)
l2=l2(1)
l3=maximal_interval(p0,p3)
l3=l3(1)
l4=maximal_interval(p0,p4)
l4=l4(1)

r=min(l1,l2,l3,l4)

endfunction
```

Επεξήγηση Κώδικα:

Η συνάρτηση παίρνει δύο ορίσματα τις μεταβλητές n και p_0 . Η μεταβλητή n είναι ένα πολυώνυμο του οποίου οι συντελεστές είναι σε διάστημα που δίνεται από τον τύπο $p(s,q)=p_0(s)+r\sum_{i=0}^{n-1}[-\varepsilon_i,\varepsilon_i]s^i$ ενώ η μεταβλητή p_0 είναι ένα απλό πολυώνυμο της μορφής $p(s)=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots\cdots+a_1 s+a_0$ όπου $a_n>0$. Στο παράδειγμα μας για να ορίσουμε το διάστημα ορίζουμε την μεταβλητή n ως πίνακα. Ο πίνακας έχει διαστάσεις $2\times d$, η τιμή του d είναι ίση με το βαθμό του πολυωνύμου συν ένα. Στη πρώτη γραμμή του πίνακα είναι τα $-\varepsilon_i$ ενώ στην δεύτερη γραμμή τα ε_i .Το αποτέλεσμα που μας δίνει είναι το μέγιστο όριο r για το οποίο όλα τα μέλη της οικογένειας είναι εύρωστα ευσταθή.

Παράδειγμα 1ο

Δίνονται τα παρακάτω πολυώνυμα

$p(s,q)=[-0.25,0.25]s^3+[-2.75,2.75]s^2+[-0.75,0.25]s+[-1.25,1.25]$ και

$p_0=s^4+10s^3+35s^2+50s+24$.

Στην γραμμή εντολών του Scilab πληκτρολογούμε:

```
-->n=[-0.25 -2.75 -0.75 -1.25; 0.25 2.75 0.75 1.25]//ορίζουμε τον πίνακα
 n  =


 - 0.25  - 2.75  - 0.75  - 1.25
   0.25    2.75    0.75    1.25
-->p0=s^4+10*s^3+35*s^2+50*s+24// ορίζουμε το πολυώνυμο ρ0
-->rmax(n,p0)// καλούμε την συνάρτηση
```

Εκτελώντας την συνάρτηση rmax(n,p0) το αποτέλεσμα που μας δίνει είναι $r_{\max}=6.1827855$.

Παράδειγμα 2ο

Δίνονται τα παρακάτω πολυώνυμα

$p(s,q)=[-1,1]+[-7,7]s+[-5,5]s^2+[-8,8]s^3+[-3,3]s^4+[-12,12]s^5$ και

$p_0=6s^4+8s^3+4s^2+2s+3$.

Στην γραμμή εντολών του Scilab πληκτρολογούμε:

```
-->n=[-1 -7 -5 -8 -3 -12;1 7 5 8 3 12] //ορίζουμε τον πίνακα
```

```
 n  =

  - 1.  - 7.  - 5.  - 8.  - 3.  - 12.
    1.    7.    5.    8.    3.    12.
-->p0=s^5+3*s^4+7*s^3+20*s^2+6*s+15    //ορίζουμε το πολυώνυμο ρ0
-->rmax(n,p0)//καλούμε την συνάρτηση
```

Εκτελώντας την συνάρτηση rmax(n,p0) το αποτέλεσμα που μας δίνει είναι $r_{\max} = 0.0018654$.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΟΡΩΝ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΑΓΓΛΙΚΩΝ ΟΡΩΝ

Βιβλιογραφία

Barmish, B. R., “New tools for robustness of linear system,” Department of electrical and computer engineering .University of Wisconsin. Copyright 1994 by Macmillan Publishing Company, a division pf Macmillan , Inc.

[1] Anderson, B. D. O., E. I. Jury and M. Mansour, “On robust Hurwitz polynomials”, IEEE Transaction on Automatic Control, vol. AC-32, pp.909-913, 1987.

[2] Barmish, B. R., “A generalization of Kharitonov’s four polynomial concept for robust stability problems with linearly dependent coefficient perturbations,” IEEE Transactions on Automatic Conrol, vol.AC-34, pp.157-165, 1989 .

[3] Bialas, S., “A necessary and sufficient condition for the stability of convex combinations of stable polynomials or matrices”, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, vol. 33, pp. 473- 480, 1985.

[4] Fu, M. and B. R. Barmish, “Maximal unidirectional perturbation bounds for stability of polynomials and matrices”, Systems and Control Letters , vol. 11, pp. 173-179,1988

[5] Kharitonov , V. L., “Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equation”, Differentsial’nye Uravneniya , vol. 14. pp. 2086-2088, 1978a.

[6] Kharitonov , V. L., “On a generalization of a stability criterion”, Izvestiya Akademii Nauk Kazakhskoi SSR Seriya Fizika Matematika, no 1, pp. 33-57, 1978b.

[7] Marden, M. Geometry of Polunomials, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1966.

[8] Tsypkin, Y. Z. and B.T. Polyak, “Frequency domain criterion for the l^p – robust stability of continuous linear systems”, IEEE Transaction on Automatic Control, vol. AC-36, pp.1464-1469, 1991.

[9] Wei, K and R. K. Yedavalli, “Robust stabilizability for linear systems with both parameter variation and unstructuted uncertainty”, IEEE Transaction on Automatic Control, vol. AC-34, pp.149-156, 1989.

[10] Βολογιαννίδης, Σταύρος, Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου, Θεωρία και Εφαρμογές, Διδακτικές σημειώσεις, Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών, Τομέας Αρχιτεκτονικής Υπολογιστών και Βιομηχανικών Εφαρμογών, ΤΕΙ Σερρών