Ευφυής Έλεγχος, Θεωρία και Εφαρμογές

Διδακτικές Σημειώσεις Τμήματος Πληροφορικής και Επικοινωνιών

Τομέας Αρχιτεκτονικής Υπολογιστικών και Βιομηχανικών εφαρμογών

Δρ. Βολογιαννίδης Σταύρος

email: svol@teiser.gr

http://www.teiser.gr/icd/staff/vologian/index.html

http://anadrasis.math.auth.gr/S.Vologiannidis.htm

Ευφυής Έλεγχος, Θεωρία και Εφαρμογές

Δρ. Βολογιαννίδης Σταύρος, (*svol@teiser.gr)*

13 Σεπτεμβρίου 2009

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

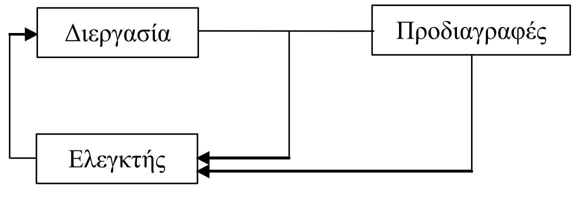
Η κλασσική θεωρία συστημάτων αυτομάτου ελέγχου, συνέβαλε αποφασιστικά στην ανάπτυξη και υλοποίηση πολλών αγαθών την λειτουργία των οποίων τώρα θεωρούμε δεδομένη, όπως τα τηλέφωνα, ο αυτόματος πιλότος ενός αεροπλάνου κλπ. Παρόλη όμως την συνεχόμενη αυτή πρόοδο, το χάσμα μεταξύ θεωρίας και πράξης κυρίως στην βιομηχανία γίνεται όλο και μεγαλύτερο. Η μεγάλη ανάγκη της βιομηχανίας για ανάπτυξη μιας καινούριας θεωρίας ελέγχου που θα ανταποκρίνεται στις ανάγκες της, οδήγησε πολλούς επιστήμονες στην έρευνα νέων μη συμβατικών τεχνικών αυτομάτου ελέγχου, κάποιες από τις οποίες περιγράφονται από τον όρο ”Ευφυής Έλεγχος”.

Η εφαρμογή τεχνικών της συμβατικής θεωρίας ελέγχου για τον έλεγχο ενός συστήματος ή μιας διαδικασίας προϋποθέτει την ύπαρξη ενός πλήρους αναλυτικού μοντέλου του ελεγχόμενου συστήματος. Κάτι τέτοιο είναι συχνά αδύνατο λόγω της πολυπλοκότητας των βιομηχανικών διεργασιών ή και της αδυναμίας μετρήσεων. Αν υπάρχει ένα τέτοιο μοντέλο τότε η συνηθέστερος τύπος ελεγκτή που χρησιμοποιείται είναι αυτός των τριών όρων (PID) με υλοποίηση σε Programmable Logic Controllers (PLC).

Η θεωρία του μη συμβατικού ελέγχου, αντί να προσπαθεί να μοντελοποιήσει το ελεγχόμενο σύστημα, ψάχνει να βρει ένα σύνολο λεκτικών προτάσεων που να περιγράφουν τις αντιδράσεις ενός επιτυχημένου ανθρώπου χειριστή του συστήματος, τις οποίες και προσπαθεί να περιγράψει με διάφορες τεχνικές όπως την ασαφή λογική και τα νευρωνικά δίκτυα.

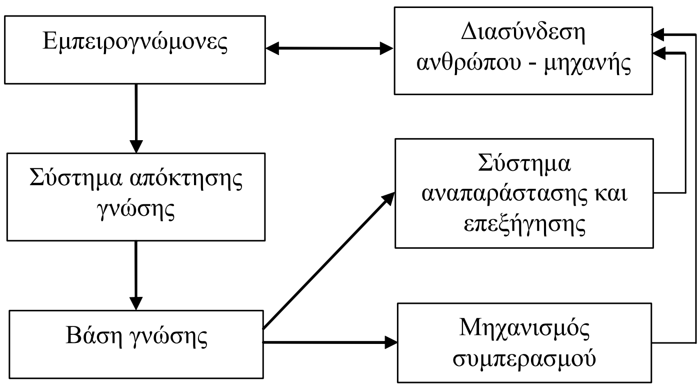
1.1 Ευφυής έλεγχος

Το πρόβλημα ελέγχου ενός συστήματος ή διεργασίας περιγράφεται από το ακόλουθο σχήμα.



Στο συμβατικό έλεγχο η διεργασία και ο ελεγκτής θεωρούνται γνωστά και μάλιστα γραμμικά με την έννοια ότι υπάρχουν γραμμικά μαθηματικά μοντέλα διαφορικών εξισώσεων που τα περιγράφουν. Οι προδιαγραφές είναι ένα σύνολο κριτηρίων όπως ευστάθεια, ταχύτητα απόκρισης, υπερύψωσης κλπ που αν πληρούνται ο ελεγκτής θεωρείται επιτυχημένος.

Ο όρος ”Ευφυής Έλεγχος” αντλεί τεχνικές από διάφορες επιστήμες όπως η νευρολογία, η ψυχολογία τα μαθηματικά κλπ. Ο στόχος ενός ευφυούς ελεγκτή είναι να λειτουργεί όπως ένας επιτυχημένος άνθρωπος ελεγκτής με τους ίδιους κανόνες χωρίς όμως τα μειονεκτήματά του. Το πλεονέκτημα των ανθρώπων σαν ελεγκτές μιας διεργασίας είναι ότι μπορούν να ανταπεξέλθουν και να πάρουν αποφάσεις κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας και να αντιδράσουν άμεσα σε απρόβλεπτες καταστάσεις. Ένας καλά σχεδιασμένος ευφυής ελεγκτής πρέπει να μπορεί να ”μιμηθεί” τον καλύτερο άνθρωπο ελεγκτή της συγκεκριμένης διαδικασίας. Έτσι ένα πρώτο πρόβλημα που πρέπει να απαντηθεί από τον σχεδιαστή ενός ευφυούς ελεγκτή είναι η καταγραφή των κανόνων με βάση τους οποίους λειτουργεί ένας επιτυχημένος άνθρωπος ελεγκτής της διεργασίας. Η εξόρυξη αυτής της γνώσης (data mining) γίνεται είτε με συνέντευξη του χειριστή είτε με τεχνικές pattern association, γενετικών αλγορίθμων κλπ. Δεύτερο βήμα είναι η αποθήκευση αυτής των κανόνων σε μια βάση γνώσης χρησιμοποιώντας είτε συμβολική μορφή (LISP, C++, κλπ) είτε αριθμητική μορφή (ασαφής λογική, νευρωνικά δίκτυα). Έπειτα ακολουθεί η επιλογή και υλοποίηση ενός μηχανισμού συμπερασμού ο οποίος παίρνοντας σαν είσοδο κάποιες μετρήσεις από την ελεγχόμενη διαδικασία και χρησιμοποιώντας την βάση γνώσης που έχει δημιουργηθεί, βγάζει κάποια έξοδο που ανατροφοδοτείται στην ελεγχόμενη διαδικασία. Τα παραπάνω βήματα φαίνονται στο σχήμα 1.1.Ο ευφυής έλεγχος συνήθως χρησιμοποιείται σε



Σχήμα 1.1: Διαδικασία σχεδίασης ευφυούς ελεγκτή.

εφαρμογές μεγάλης κλίμακας και πολυπλοκότητας, μια και τότε είναι πρακτικά αδύνατη η εφαρμογή συμβατικών τεχνικών.

Η βασικές αρχές πάνω στις οποίες σχεδιάζεται ένας ευφυής ελεγκτής είναι οι ακόλουθες.

- Ορθότητα: Η ικανότητα εκτέλεσης των λειτουργικών απαιτήσεων του συστήματος με ασφάλεια.
- Ευρωστία: Η ικανότητα του συστήματος να παραμένει λειτουργικό κάτω από μη αναμενόμενες συνθήκες.

- Επεκτασιμότητα: Η δυνατότητα επέκτασης του υλικού και του λογισμικού χωρίς επανασχεδίαση του συστήματος από την αρχή.

Σε αυτό το μάθημα θα ασχοληθούμε με τον ασαφή και νευρωνικό έλεγχο. Στα ασαφή συστήματα η αναπαράσταση της γνώσης γίνεται μέσω ασαφών συνόλων και ασαφούς λογικής ενώ στον νευρωνικό έλεγχο μέσω μη γραμμικών σχέσεων.

Κεφάλαιο 2

Ασαφής έλεγχος

Στα μέσα του 1960 ο Lotfi A. Zadeh του πανεπιστημίου Berkeley της Καλιφόρνια εφήυρε την θεωρία των ασαφών συνόλων, η οποία λέει ότι συνήθως στον κόσμο που ζούμε τα αντικείμενα γύρω μας ανήκουν σε διάφορα σύνολα με διαφορετικούς βαθμούς συμμετοχής. Πχ. η κλάση των ”ψηλών ανθρώπων” δεν έχει αυστηρό κριτήριο συμμετοχής. Ο ασαφής ορισμός κλάσεων παίζει πολύ μεγάλο ρόλο στην ανθρώπινη επικοινωνία. Το 1965 ο Zadeh θεμελίωσε πλήρως την θεωρία των ασαφών συνόλων και της ασαφής λογικής ολοκληρώνοντας την δουλειά αρκετών άλλων μαθηματικών μέχρι τότε. Η θεωρία του Zadeh δέχθηκε μεγάλη αμφισβήτηση κυρίως στην Αμερική. Την δεκαετία του 1970 ο Ebrahim H. Mamdani, μηχανικός στο πανεπιστήμιο Queen Mary του Λονδίνου δοκίμασε για πρώτη φορά την ασαφή λογική για την ανάπτυξη ενός ελεγκτή ατμομηχανής. Η επιτυχία τους οδήγησε στην αναγνώριση της ασαφούς λογικής σαν ένα σημαντικό εργαλείο αυτομάτου ελέγχου κάτι που φαίνεται και από την πληθώρα επιστημονικών δημοσιεύσεων πάνω στο θέμα.

Η ελληνική βιβλιογραφία πάνω στο ασαφή έλεγχο είναι μηδαμινή. Για την συγγραφή αυτών των σημειώσεων πολύτιμα φάνηκαν τα βιβλία [3], [1].

2.1 Ασαφή σύνολα - Βασικοί ορισμοί

Η θεωρία συνόλων αρχικά αναπτύχθηκε από τον Cantor (1845-1918). Η θεωρία του δέχθηκε μεγάλη αμφισβήτηση και τελικά πέθανε το 1918 σε ψυχιατρική κλινική. Σύνολο είναι οποιαδήποτε συλλογή - ομάδα ομοειδών πραγμάτων (πραγμάτων που έχουν ή ικανοποιούν μία συγκεκριμένη ιδιότητα). Τα μέλη της ομάδας αυτής καλούνται στοιχεία του συνόλου. Το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου καλείται πληθικός αριθμός του συνόλου (συμβολίζεται συνήθως με N). Υπάρχουν πεπερασμένα και άπειρα σύνολα, ανάλογα με το αν ο πληθικός τους αριθμός είναι πεπερασμένος ή άπειρος.

Ορισμός 2.1 *Εστω X ένα μη μηδενικό σύνολο. Ένα ασαφές σύνολο A του X χαρακτηρίζεται από την συνάρτηση συμμετοχής του $\mu_A : X \to [0,1]$ όπου $\mu_A(x)$ είναι ο βαθμός συμμετοχής του στοιχείου $x \in X$ στο ασαφές σύνολο A.*

Το ασαφές σύνολο A χαρακτηρίζεται πλήρως από το σύνολο των ζευγαριών $A = \{(x, \mu_A(x))$ όπου $x \in X\}$. Αν $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο και A ένα ασαφές σύνολο του X τότε χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

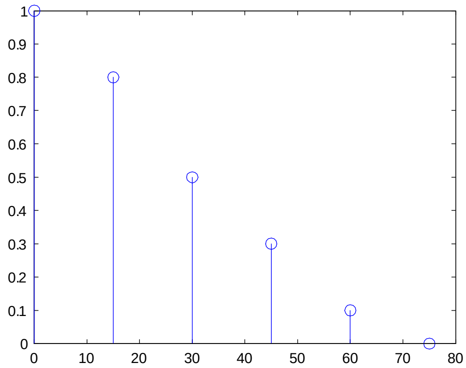
$$A = \mu_1/x_1 + \ldots + \mu_n/x_n$$

όπου μ_i/x_i συμβολίζει ότι μ_i είναι ο βαθμός συμμετοχής του x_i στο A και το $+$ συμβολίζει την ένωση. Είναι προφανές ότι όσο μεγαλύτερο βαθμό συμμετοχής έχει ένα στοιχείο τόσο περισσότερο ”ανήκει” στο σύνολο.

Παράδειγμα 2.2 *Έστω ότι έχουμε το πεπερασμένο σύνολο* $X = \{0, 15, 30, 45, 60, 75\}$ *όπου τα στοιχεία του* X *είναι ανθρώπινες ηλικίες σε χρόνια. Έστω επίσης ότι θέλουμε να ορίσουμε το σύνολο των νέων ανθρώπων πάνω στο σύνολο* X. *Η παραπάνω έννοια μπορεί να εκφραστεί από το ακόλουθο ασαφές σύνολο*

$$A = 1/0 + 0.8/15 + 0.5/30 + 0.3/45 + 0.1/60 + 0/75$$

και γραφικά από το ακόλουθο



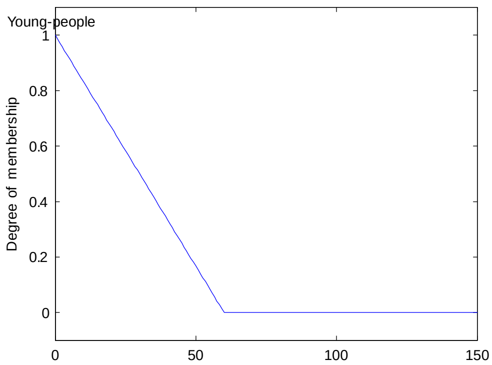
Προφανώς οι τιμές συμμετοχής του κάθε στοιχείου του X *είναι υποκειμενικές. Αντίστοιχα και ίσως πιο βολικά το ασαφές σύνολο θα μπορούσαμε να το παρουσιάσουμε σε μορφή δύο πινάκων*

$X =$	0	15	30	45	60	75
$\mu_A(X) =$	1	0.8	0.5	0.3	0.1	0

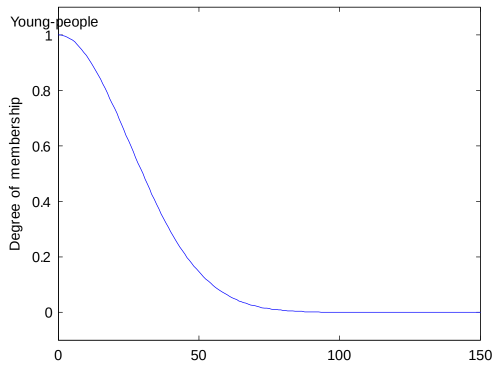
Αν τώρα σαν X *έχω το σύνολο των πραγματικών αριθμών από το 0 μέχρι το 150 δηλαδή* $X = [0, 150]$ *τότε το ασαφές σύνολο των νέων ανθρώπων θα μπορούσε να οριστεί μέσω της*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{-1}{60}x + 1, 0 \leq x \leq 60 \\ 0, 60 < x \leq 150 \end{cases}$$

η οποία γραφικά φαίνεται στο επόμενο σχήμα



Το ίδιο σύνολο θα μπορούσε να οριστεί αν σαν συνάρτηση συμμετοχής έχω την παρακάτω συνάρτηση του Gauss.

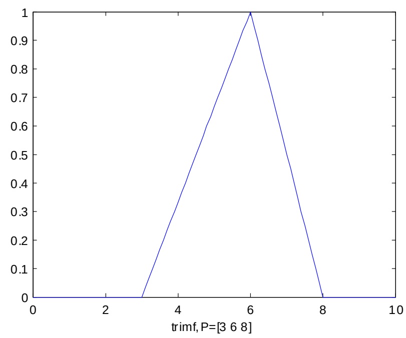


Όταν το σύνολο X είναι συνεχές τότε και η συνάρτηση συμμετοχής που αντιστοιχεί σε ένα ασαφές σύνολο A είναι και αυτή με τη σειρά της συνεχής. Υπάρχουν συγκεκριμένοι τύποι συναρτήσεων που χρησιμοποιούμε.

- Τριγωνική (Σχήμα 2.1). Έχει σαν παραμέτρους τρεις πραγματικούς αριθμούς a, b, c.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & x \geq c \end{cases}$$

Στο MATLAB παράγεται από τις ακόλουθες εντολές.

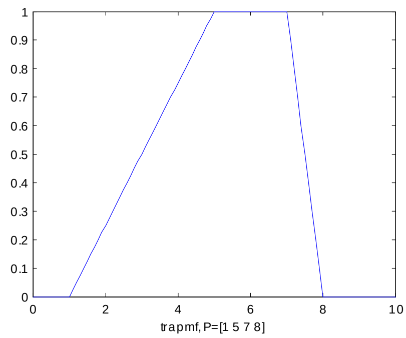


Σχήμα 2.1: Τριγωνική συνάρτηση συμμετοχής.

```
x=0:0.1:10;
y=trimf(x,[3 6 8]);
plot(x,y)
xlabel('trimf, P=[3 6 8]')
```

- Τραπεζοειδής (Σχήμα 2.2). Έχει τέσσερις πραγματικούς αριθμούς σαν παραμέτρους a, b, c, d.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1 & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & x \geq d \end{cases}$$



Σχήμα 2.2: Τραπεζοειδής συνάρτηση συμμετοχής

```
x=0:0.1:10;
y=trapmf(x,[1 5 7 8]);
plot(x,y)
xlabel('trapmf, P=[1 5 7 8]')
```

- Καμπανοειδής (Σχήμα 2.3). Έχει σαν παραμέτρους τρεις πραγματικούς αριθμούς a, b, c.

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

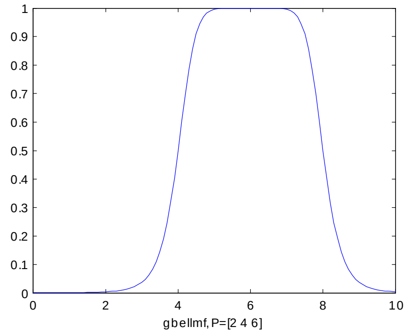
Η παράμετρος c δείχνει το κέντρο της καμπύλης, η b το σημείο που έχει σαν τιμή 0.5 και η a το σημείο που από 0 γίνεται αυστηρά θετική.

```
x=0:0.1:10;
y=gbellmf(x,[2 4 6]);
plot(x,y)
xlabel('gbellmf, P=[2 4 6]')
```

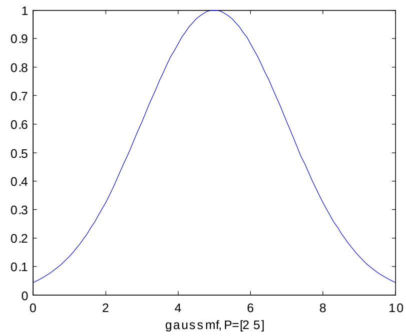
- Συμμετρική συνάρτηση του Gauss (Σχήμα 2.4). Έχει σαν παραμέτρους δύο πραγματικούς αριθμούς a, c.

$$\mu_A(x) = e^{\frac{-(x-c)^2}{2a^2}}$$

Η c δείχνει το κέντρο της καμπύλης.



Σχήμα 2.3: Καμπανοειδής συνάρτηση συμμετοχής.



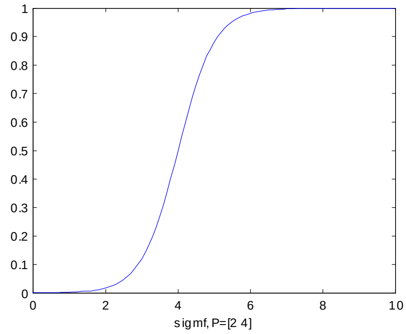
Σχήμα 2.4: Συνάρτηση συμμετοχής του Gauss.

```
x=0:0.1:10;
y=gaussmf(x,[2 5]);
plot(x,y)
xlabel('gaussmf, P=[2 5]')
```

- Σιγμοειδής (Σχήμα 2.5). Έχει σαν παραμέτρους δύο πραγματικούς αριθμούς a, c.

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-c)}}$$

```
x=0:0.1:10;
y=sigmf(x,[2 4]);
plot(x,y)
xlabel('sigmf, P=[2 4]')
```

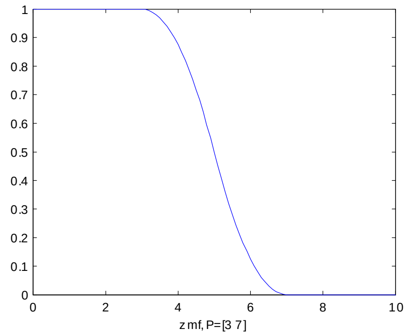


Σχήμα 2.5: Σιγμοειδής συνάρτηση συμμετοχής.

- Z συνάρτηση (Σχήμα 2.6). Έχει σαν παραμέτρους δύο πραγματικούς αριθμούς a, b.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ 1 - 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2, & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ 2\left(b - \frac{x}{b-a}\right)^2, & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \\ 0, & x \geq b \end{cases}$$

Τα a, b δείχνουν τα άκρα της καμπύλης.



Σχήμα 2.6: Συνάρτηση συμμετοχής .

```
x=0:0.1:10;
y=zmf(x,[3 7]);
plot(x,y)
xlabel('zmf, P=[3 7]')
```

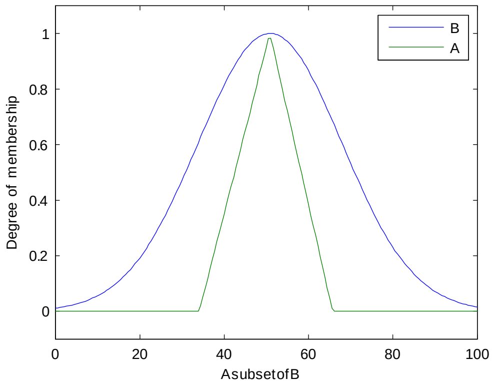
Θα συνεχίσουμε με κάποιους ορισμούς πάνω στα ασαφή σύνολα.

Ορισμός 2.3 *Εστω A ένα ασαφές σύνολο του X. Τότε υποστήριξη του A (*$\sup p(A)$*) είναι ένα κλασσικό υποσύνολο του X του οποίου όλα τα στοιχεία έχουν μη μηδενικούς βαθμούς συμμετοχής στο A.*

Ορισμός 2.4 *Κανονικό ασαφές σύνολο ονομάζεται το ασαφές σύνολο στο οποίο υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο με βαθμό συμμετοχής* 1.

Ορισμός 2.5 *Έστω A και B δύο ασαφή σύνολα ενός συνόλου X. Τότε θα λέμε ότι το A είναι υποσύνολο του B ($A \subset B$) αν $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ για κάθε $x \in X$.*

Το παρακάτω γράφημα μας δείχνει τις συναρτήσεις συμμετοχής δύο ασαφών συνόλων A και B του $X = [0, 100]$. Προφανώς το A είναι υποσύνολο του B.



Παράδειγμα 2.6 *Έστω ότι έχουμε το πεπερασμένο σύνολο $X = \{0, 20, 40, 60, 80, 100\}$ και δύο ασαφή σύνολα A και B του X ορισμένα ως εξής:*

$X =$	0	20	40	60	80	100
$\mu_A(X) =$	0	0.4	1	0.8	0.3	0
$\mu_B(X) =$	0	0.3	1	0.6	0.2	0

Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι $B \subset A$.

Ορισμός 2.7 *Το κενό ασαφές σύνολο του X που θα συμβολίζεται με $\varnothing$ είναι το σύνολο με συνάρτηση συμμετοχής $\mu_{\varnothing}(x) = 0$ για κάθε $x \in X$. Προφανώς για κάθε ασαφές σύνολο A του X ισχύει $\varnothing \subset A$.*

Ορισμός 2.8 *Καθολικό ασαφές σύνολο 1_X του X είναι το σύνολο με συνάρτηση συμμετοχής $\mu_{1_X}(x) = 1$ για κάθε $x \in X$. Προφανώς για κάθε ασαφές σύνολο A του X ισχύει $A \subset 1_X$.*

Ορισμός 2.9 *Ασαφές σημείο $\bar{x}_0$ ή singleton θα ονομάζεται το ασαφές σύνολο που ορίζεται από την ακόλουθη συνάρτηση συμμετοχής*

$$\mu_{\bar{x}_0}(x) = \begin{cases} 1, x = x_0 \\ 0, x \neq x_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

2.2 Πράξεις ασαφών συνόλων

Ορισμός 2.10 *Ας θεωρήσουμε δύο ασαφή σύνολα A και B ορισμένα πάνω στο ίδιο κλασσικό σύνολο X. Τότε η τομή $A \cap B$ αυτών των δύο συνόλων είναι και αυτή ένα ασαφές σύνολο του X με συνάρτηση συμμετοχής*

$$\mu_{A \cap B}(x) := \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

όπου $\wedge$ είναι ο τελεστής ελαχίστου του Mamdani

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x), \text{ για κάθε } x \in X\} \tag{2.2}$$

ή ο τελεστής γινομένου του Larsen

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x) \tag{2.3}$$

Αντίστοιχα η ένωση $A \cup B$ είναι ένα ασαφές σύνολο του X με συνάρτηση συμμετοχής

$$\mu_{A\cup B}(x) := \mu_A(x) \vee \mu_B(x).$$

όπου $\vee$ ο τελεστής μεγίστου του Mamdani

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x), \text{ για κάθε } x \in X\} \tag{2.4}$$

ή ο τελεστής $probor$

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x) \tag{2.5}$$

Ορισμός 2.11 *Το συμπλήρωμα $\neg A$ ενός ασαφούς συνόλου A είναι ένα ασαφές σύνολο του X με συνάρτηση συμμετοχής*

$$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Παρατήρηση 2.12 *Η τομή δύο συνόλων αντιστοιχεί στο λεκτικό ΚΑΙ (AND) ενώ η ένωση στο λεκτικό Ή (OR). Το συμπλήρωμα αντιστοιχεί στην άρνηση μιας πρότασης.*

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι πράξεις όπως ορίστηκαν πριν είναι ορισμένες και για συνεχή και για διακριτά ασαφή σύνολα. Επειδή τα συνεχή ασαφή σύνολα προϋποθέτουν πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις, κάτι που είναι αρκετά πολύπλοκο, στα επόμενα παραδείγματα θα επικεντρωθούμε στην διακριτή περίπτωση.

Παράδειγμα 2.13 *Μια τετραμελής οικογένεια θέλει να αγοράσει ένα σπίτι. Έστω $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ το σύνολο των διαθέσιμων για αγορά σπιτιών χαρακτηρισμένα από τον αριθμό των δωματίων τους. Η οικογένεια έχει δύο κριτήρια για το καλύτερο σπίτι. Το πρώτο είναι το να είναι βολικό και το δεύτερο να είναι μεγάλο. Έστω το ασαφές σύνολο A που περιγράφει την έννοια "βολικό" και B αυτό που περιγράφει την έννοια "μεγάλο". Οι συναρτήσεις συμμετοχής των συνόλων αυτών συμπληρώνονται μετά από συνέντευξη με την οικογένεια ως εξής.*

$X =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_A(X) =$	0.2	0.5	0.8	1	0.7	0.3	0	0	0	0
$\mu_B(X) =$	0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1	1	1

Το σύνολο που περιγράφεται από την πρόταση "βολικό ΚΑΙ μεγάλο" είναι σύμφωνα με τα παραπάνω η τομή των A και B η οποία με τον τελεστή min *δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα.*

$\mu_{A\cap B}(X) =$	0	0	0.2	0.4	0.6	0.3	0	0	0	0

Άρα η καλύτερη επιλογή για την οικογένεια που ψάχνει σπίτι "βολικό ΚΑΙ μεγάλο" είναι το σπίτι που έχει το μεγαλύτερο βαθμό συμμετοχής στο $A \cap B$ δηλαδή αυτό με τα 5 δωμάτια ($\mu_{A\cap B}(5) = 0.6$).

Αντίστοιχα αν η οικογένεια έψαχνε σπίτι "βολικό Ή μεγάλο" θα δημιουργούσαμε την ένωση $\mu_{A\cup B}(X)$ διαλέγοντας π.χ. τον τελεστή min.

$\mu_{A\cup B}(X) =$	0.2	0.5	0.8	1	0.7	0.8	1	1	1	1

Αντίστοιχα με τον τελεστή $probor$ θα είχαμε

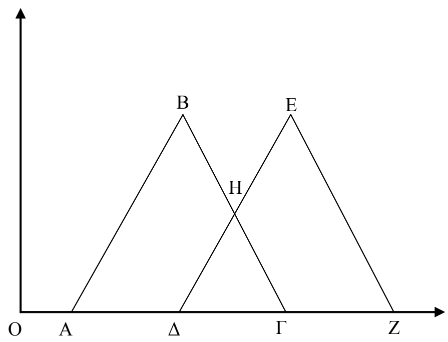
$\mu_{A\cup B}(X) =$	0.2	0.5	0.84	1	0.88	0.86	1	1	1	1

Αν τέλος η οικογένεια ήθελε για οικονομικούς λόγους σπίτι "βολικό ΚΑΙ ΟΧΙ μεγάλο" όπου το "ΚΑΙ" αντιστοιχεί στο τελεστή min τότε το ασαφές σύνολο C που αντιστοιχεί είναι το $C = A \cap (\neg B)$. Έτσι έχουμε

$\mu_{\neg B}(X) =$	1	1	0.8	0.6	0.4	0.2	0	0	0	0
$\mu_A(X) =$	0.2	0.5	0.8	1	0.7	0.3	0	0	0	0
$\mu_C(X) =$	0.2	0.5	0.8	0.6	0.4	0.2	0	0	0	0

και σε αυτή την περίπτωση η βέλτιστη απόφαση θα ήταν να αγοράσουν το σπίτι με τα 3 δωμάτια.

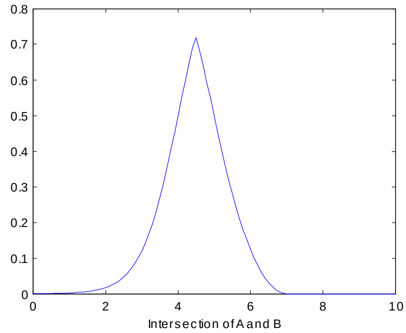
Παράδειγμα 2.14 *Έστω δύο ασαφή σύνολα A και B ορισμένα πάνω στο ίδιο μη πεπερασμένο σύνολο X. Οι συναρτήσεις συμμετοχής τους φαίνονται στο παρακάτω γράφημα*



όπου η συνάρτηση συμμετοχής του A είναι αυτή που σχηματίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΑΒΓΖ και του B από τα ΟΔΕΖ. Η τομή $A \cap B$ θα έχει συνάρτηση συμμετοχής την ΟΔΗΓΖ ενώ η ένωση $A \cup B$ την ΟΑΒΗΕΖ.

Παράδειγμα 2.15 *Έστω δύο ασαφή σύνολα A και B ορισμένα πάνω στο ίδιο συνεχές σύνολο $X = [0, 10]$. Οι συναρτήσεις συμμετοχής των είναι αυτές των σχημάτων 2.5 και 2.6 δηλαδή η $\mu_A(X)$ είναι σιγμοειδής με $a = 2$, $c = 4$ και η $\mu_B(X)$ Z συνάρτηση με $a = 3, b = 7$. Για την τομή $A \cap B$ χρησιμοποιούμε τον τελεστή του ελαχίστου (2.2).*

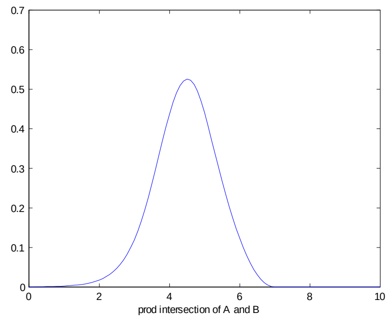
```
x=0:0.1:10;
y1=sigmf(x,[2 4]);
y2=zmf(x,[3 7]);
y=min(y1,y2);
plot(x, y)
xlabel('Intersection of A and B')
```



$A \cap B$ με τον τελεστή του ελαχίστου.

Παράδειγμα 2.16 *Με τον τελεστή γινομένου (2.3) έχουμε:*

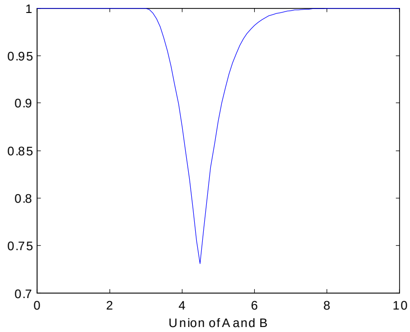
```
x=0:0.1:10;
y1=sigmf(x,[2  4]);
y2=zmf(x,[3  7]);
y=y1*y2;
plot(x, y)
xlabel('prod intersection of A and B')
```



$A \cap B$ με τον τελεστή του γινομένου.

Παράδειγμα 2.17 *Αντίστοιχα η ένωση $A \cup B$ με τον τελεστή max (2.4) θα έχει σαν συνάρτηση συμμετοχής το μέγιστο των $\mu_A(X)$ και $\mu_B(X)$.*

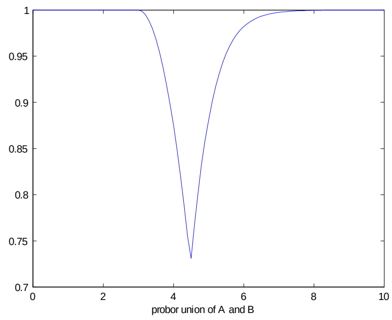
```
x=0:0.1:10;
y1=sigmf(x,[2  4]);
y2=zmf(x,[3  7]);
y=max(y1,y2);
plot(x, y)
xlabel('Union of A and B')
```



$A \cup B$ με τον τελεστή max.

Παράδειγμα 2.18 *ενώ με τον τελεστή* $probor$ *(2.5) έχουμε*

```
x=0:0.1:10;
y1=sigmf(x,[2 4]);
y2=zmf(x,[3 7]);
y=probor([y1;y2]);
plot(x, y)
xlabel('probor union of A and B')
```



$A \cup B$ με τον τελεστή $probor$.

Παράδειγμα 2.19 *Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα του* max *με τον* $probor$ *μοιάζουν πολύ όπως και αυτά του* min *με τον* $prod$ *με την διαφορά ότι οι δεύτεροι τελεστές κάνουν τις καμπύλες πιο "ομαλές".*

Εκτός από τις παραπάνω βασικές πράξεις που ορίστηκαν, υπάρχουν και κάποιες πράξεις που χρησιμοποιούμε συχνά για να περιγράψουμε κάποιες έννοιες.

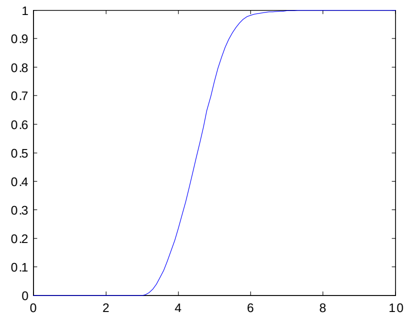
Ορισμός 2.20 *Λεκτικός μετατροπέας ονομάζεται μια πράξη πάνω σε ένα ασαφές σύνολο που μετατρέπει την λεκτική έννοια αυτού του συνόλου.*

Χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός λεκτικού μετατροπέα είναι το "ΠΟΛΥ". Έτσι συνεχίζοντας το προηγούμενο παράδειγμα το ασαφές σύνολο "ΠΟΛΥ μεγάλο" που θα συμβολίζεται B^2 ορίζεται από την συνάρτηση συμμετοχής $\mu_{B^2}(x) = (\mu_B(x))^2$. Αντίστοιχα ο λεκτικός μετατροπέας "ΠΕΡΙΠΟΥ" ή "ΣΧΕΔΟΝ" αν τον εφαρμόσουμε στο ασαφές σύνολο B, θα συμβολίζεται $B^{1/2}$ ορίζεται από την συνάρτηση συμμετοχής $\mu_{B^{1/2}}(x) = \sqrt{\mu_B(x)}$

$\mu_B(X) =$	0.2	0.5	0.8	1	0.7	0.3	0	0	0	0
$\mu_{B^2}(X) =$	0.04	0.25	0.64	1	0.49	0.09	0	0	0	0
$\mu_{B^{1/2}}(X) =$	0.44	0.70	0.89	1	0.83	0.54	0	0	0	0

Παράδειγμα 2.21 *Συνεχίζοντας το παράδειγμα 2.15 θα βρούμε με τη βοήθεια του MATLAB την συνάρτηση συμμετοχής του* $A \cap (\neg B^2)$.

```
x=0:0.1:10;
y1=sigmf(x,[2  4]);
y2=zmf(x,[3  7]);
y2d=1-y2.^2;
y=min(y1,y2d);
plot(x, y)
```



Παράδειγμα 2.22
Συνάρτηση συμμετοχής του $A \cap (\neg B^2)$.

Πιο κάτω αναφέρονται κάποιες βασικές ιδιότητες της ένωσης και της τομής ασαφών συνόλων.

- Μεταβατική ιδιότητα

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned}$$

- Προσεταιριστική ιδιότητα

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

- Επιμεριστική ιδιότητα

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (B \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (B \cup C) \end{aligned}$$

- Ιδιότητα του De Morgan

$$\begin{aligned}\neg(A \cap B) &= \neg A \cup \neg B \\ \neg(A \cup B) &= \neg A \cap \neg B\end{aligned}$$

- Απορροφητική ιδιότητα

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup A &= A \\ (A \cup B) \cap A &= A\end{aligned}$$

- Τέλος ισχύει

$$\begin{aligned}A \cup A &= A \\ A \cap A &= A\end{aligned}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι $A \cup (\neg A) \neq 1_X$ και $A \cap (\neg A) \neq \varnothing$.

2.3 Σχέσεις μεταξύ ασαφών συνόλων

Στον ασαφή έλεγχο η σχέσεις μεταξύ αντικειμένων παίζουν σημαντικό ρόλο. Μερικές σχέσεις αφορούν στοιχεία μέσα στο ίδιο σύνολο, πχ μια μέτρηση είναι μεγαλύτερη από κάποια άλλη. Άλλες σχέσεις ορίζονται μεταξύ διαφόρων συνόλων, πχ μια μέτρηση έχει μεγάλη τιμή και ταχύτητα μεταβολής της είναι θετική κλπ. Ένα απλό παράδειγμα μιας ασαφούς σχέσης είναι η ομοιότητα δύο ανθρώπων. Πχ ο Τάσος μοιάζει με τον Κώστα με βαθμό 0.7 ενώ ο Κώστας με τον Θανάση σε βαθμό 0.3. Το παραπάνω παράδειγμα είναι μια σχέση μεταξύ δύο στοιχείων αλλά γενικά είναι δυνατόν να ορίσουμε σχέσεις με περισσότερα από δύο στοιχεία.

Ορισμός 2.23 *Έστω X και Y δύο μη κενά σύνολα. Μια ασαφής σχέση R μεταξύ αυτών των δύο συνόλων είναι ένα ασαφές σύνολο του καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$. Αν $x \in X$ και $y \in Y$ τότε με $R(x, y)$ θα συμβολίζεται ο βαθμός συμμετοχής του διατεταγμένου ζεύγους (x, y) στην σχέση R.*

Παράδειγμα 2.24 *Έστω $X = \{$Τάσος, Γιώργος, Βασίλης$\}$ και $Y = \{$Διονυσία, Δέσποινα$\}$. Αν ορίσουμε μια σχέση R_1 ανάμεσα σε αυτά τα δύο σύνολα προσπαθώντας να εκφράσουμε τον βαθμό συμπάθειας μεταξύ των στοιχείων του X και του Y τότε θα πρέπει να βρούμε το βαθμό συμμετοχής στη σχέση καθενός από τα διατεταγμένα ζεύγη (x, y) όπου $x \in X$ και $y \in Y$. Έστω ότι*

$$\begin{gathered}R_1(\text{Τάσος, Διονυσία}) = 0.4, \\ R_1(\text{Γιώργος, Διονυσία}) = 0.8, \\ R_1(\text{Βασίλης, Διονυσία}) = 0.5, \\ R_1(\text{Τάσος, Δέσποινα}) = 0.7, \\ R_1(\text{Γιώργος, Δέσποινα}) = 0.5, \\ R_1(\text{Βασίλης, Δέσποινα}) = 0.8.\end{gathered}$$

Κάτι τέτοιο είναι απλό να το εκφραστεί με ένα πίνακα της παρακάτω μορφής

R_1	Διονυσία	Δέσποινα
Τάσος	0.4	0.7
Γιώργος	0.8	0.5
Βασίλης	0.5	0.8

Πράξεις μεταξύ ασαφών σχέσεων

Ορισμός 2.25 *Τομή μεταξύ δύο ασαφών σχέσεων R_1 και R_2 ορισμένων πάνω σε δύο μη κενά σύνολα X και Y ορίζεται η σχέση $R_1 \cap R_2$ με συνάρτηση συμμετοχής την*

$$(R_1 \cap R_2)(x, y) = R_1(x, y) \wedge R_2(x, y)$$

όπου το $\wedge$ είναι είτε το ελάχιστο (2.2)

$$(R_1 \cap R_2)(x, y) = \min\{R_1(x, y), R_2(x, y)\}$$

είτε το γινόμενο (2.3)

$$(R_1 \cap R_2)(x, y) = R_1(x, y)R_2(x, y)$$

Ορισμός 2.26 *Ένωση μεταξύ δύο ασαφών σχέσεων R_1 και R_2 ορισμένων πάνω σε δύο μη κενά σύνολα X και Y ορίζεται η σχέση $R_1 \cup R_2$ με συνάρτηση συμμετοχής την*

$$(R_1 \cup R_2)(x, y) = R_1(x, y) \vee R_2(x, y)$$

όπου $\vee$ είναι είτε το μέγιστο

$$(R_1 \cup R_2)(x, y) = \max\{R_1(x, y), R_2(x, y)\}$$

είτε το $probor$

$$(R_1 \cup R_2)(x, y) = R_1(x, y) + R_2(x, y) - R_1(x, y)R_2(x, y).$$

Συνεχίζοντας το παράδειγμα 2.24 ας ορίσουμε και μια δεύτερη σχέση R_2 που εκφράζει τον βαθμό συμβατότητας των χαρακτήρων των X και Y.

R_2	Διονυσία	Δέσποινα
Τάσος	0.4	0.6
Γιώργος	0.3	0.6
Βασίλης	0.5	0.5

Αν θέλουμε να βρούμε την σχέση που λεκτικά εκφράζεται από το "Ο x συμπαθεί τον y *ΚΑΙ* ο x είναι συμβατός με τον y", χρειάζεται να υπολογίσουμε την τομή των δύο σχέσεων.

$R_1 \cap R_2$	Διονυσία	Δέσποινα
Τάσος	0.4	0.6
Γιώργος	0.3	0.5
Βασίλης	0.5	0.5

Αντίστοιχα η ένωση $R_1 \cup R_2$ ερμηνεύεται ως "Ο x συμπαθεί τον y *Ή* ο x είναι συμβατός με τον y"

$R_1 \cup R_2$	Διονυσία	Δέσποινα
Τάσος	0.4	0.7
Γιώργος	0.8	0.6
Βασίλης	0.5	0.8

Ορισμός 2.27 *Καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ μεταξύ δυο ασαφών συνόλων A και B ορίζεται ως η ασαφής σχέση με συνάρτηση συμμετοχής*

$$(A \times B)(x, y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$$

για όλα τα $x \in A$ και $y \in B$.

Ορισμός 2.28 *$Sup - min$ ή αλλιώς* $\max - \min$ *σύνθεση $A \circ R$ ενός ασαφούς συνόλου A του X με μια σχέση R ορισμένης πάνω σε δύο μη κενά σύνολα X και Y είναι ένα ασαφές σύνολο ορισμένο στο Y με συνάρτηση συμμετοχής*

$$\mu_{A \circ R}(y) = \sup_{x \in X} \min \{\mu_A(x), R(x, y)\} \tag{2.6}$$

για κάθε $y \in Y$.

Αντίστοιχα με την $sup - min$ σύνθεση ορίζεται η $max - prod$ σύνθεση και η $max - average$ σύνθεση.

Ορισμός 2.29 $\max -prod$ *σύνθεση $A \cdot R$ ενός ασαφούς συνόλου A του X με μια σχέση R ορισμένης πάνω σε δύο μη κενά σύνολα X και Y είναι ένα ασαφές σύνολο ορισμένο στο Y με συνάρτηση συμμετοχής*

$$\mu_{A \circ R}(y) = \max_{x \in X} \{\mu_A(x) \cdot R(x, y)\} \tag{2.7}$$

για κάθε $y \in Y$.

Ορισμός 2.30 $\max -average$ *σύνθεση $A < + > R$ ενός ασαφούς συνόλου A του X με μια σχέση R ορισμένης πάνω σε δύο μη κενά σύνολα X και Y είναι ένα ασαφές σύνολο ορισμένο στο Y με συνάρτηση συμμετοχής*

$$\mu_{A \circ R}(y) = \max_{x \in X} \left\{ \frac{1}{2} \left(\mu_A(x) + R(x, y)\right) \right\} \tag{2.8}$$

για κάθε $y \in Y$.

Παράδειγμα 2.31 *Έστω $X = \{0, 25, 50, 75\}$ και $Y = \{4, 17, 42, 80\}$ δύο σύνολα. Ας ορίσουμε το ασαφές σύνολο A στο X ως "μεγάλοι θετικοί αριθμοί" με συνάρτηση συμμετοχής*

$$\mu_A(x) = 0/0 + 0.34/25 + 0.7/50 + 1/75.$$

Έστω επιπλέον η σχέση $R(x, y) = 1 - \frac{|x-y|}{80}$ ορισμένη πάνω στα X και Y που δηλώνει πόσο κοντά είναι οι αριθμοί x και y μεταξύ τους.

R	4	17	42	80
0	0.95	0.7875	0.475	0
25	0.7375	0.9	0.7875	0.3125
50	0.425	0.5875	0.9	0.625
75	0.1125	0.275	0.5875	0.9375

Τότε με βάση τον ορισμό της $sup - min$ σύνθεσης ασαφούς συνόλου με σχέση έχουμε

$$A \circ R = (0/0 + 0.34/25 + 0.7/50 + 1/75) \circ \begin{array}{|c||c|c|c|c|} \hline R & 4 & 17 & 42 & 80 \\ \hline 0 & 0.95 & 0.7875 & 0.475 & 0 \\ 25 & 0.7375 & 0.9 & 0.7875 & 0.3125 \\ 50 & 0.425 & 0.5875 & 0.9 & 0.625 \\ 75 & 0.1125 & 0.275 & 0.5875 & 0.9375 \\ \hline \end{array}$$

και το αποτέλεσμα είναι

$$A \circ R = SUP_X \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline min\{0.95,0\} & min\{0.7875,0\} & min\{0.475,0\} & min\{0,0\} \\ min\{0.7375,0.34\} & min\{0.9,0.34\} & min\{0.7875,0.34\} & min\{0.3125,0.34\} \\ min\{0.425,0.7\} & min\{0.5875,0.7\} & min\{0.9,0.7\} & min\{0.625,0.7\} \\ min\{0.1125,1\} & min\{0.275,1\} & min\{0.5875,1\} & min\{0.9375,1\} \\ \hline \end{array} \right) =$$

$$= SUP_X \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.34 & 0.34 & 0.34 & 0.3125 \\ 0.425 & 0.5875 & 0.7 & 0.625 \\ 0.1125 & 0.275 & 0.5875 & 0.9375 \end{pmatrix}$$

και άρα

$$A \circ R = 0.425/4 + 0.5875/17 + 0.7/42 + 0.9375/80. \tag{2.9}$$

Αντίστοιχα η $max - prod$ σύνθεση δίνεται από

$$A{\cdot}R = MAX_X \left(\begin{array}{|l|l|l|l|} \hline 0.95 \cdot 0 & 0.7875 \cdot 0 & 0.475 \cdot 0 & 0 \cdot 0 \\ \hline 0.7375 \cdot 0.34 & 0.9 \cdot 0.34 & 0.7875 \cdot 0.34 & 0.3125 \cdot 0.34 \\ \hline 0.425 \cdot 0.7 & 0.5875 \cdot 0.7 & 0.9 \cdot 0.7 & 0.625 \cdot 0.7 \\ \hline 0.1125 \cdot 1 & 0.275 \cdot 1 & 0.5875 \cdot 1 & 0.9375 \cdot 1 \\ \hline \end{array} \right) =$$

$$= MAX_X \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25075 & 0.306 & 0.26775 & 0.10625 \\ 0.2975 & 0.41125 & 0.63 & 0.4375 \\ 0.1125 & 0.275 & 0.5875 & 0.9375 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot R = 0.2975/4 + 0.41125/17 + 0.63/42 + 0.9375/80$$

Το $A \circ R$ (ή αντίστοιχα το $A \cdot R$) είναι ένα ασαφές σύνολο ορισμένο στο Y και λεκτικά θα μπορούσε να μας ορίζει τους "μεγάλους θετικούς αριθμούς" στο Y. Έτσι το 4 βγαίνει ότι ανήκει κατά 0.425 στο ασαφές σύνολο των "μεγάλων θετικών αριθμών" ενώ πχ το 80 κατά 0.9375.

Ένας απλός τρόπος για να κάνουμε την $sup - min$ σύνθεση είναι να την προσομοιώσουμε με πολλαπλασιασμό των πινάκων

$$A \circ R = \begin{bmatrix} 0 & 0.34 & 0.7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.34 & 0.34 & 0.34 & 0.3125 \\ 0.425 & 0.5875 & 0.7 & 0.625 \\ 0.1125 & 0.275 & 0.5875 & 0.9375 \end{bmatrix}$$

όπου ο πολλαπλασιασμός είναι η πράξη min ενώ η πρόσθεση το max. Έτσι θα έχω ότι

$$A \circ R = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

όπου

$$\begin{aligned} \alpha &= (0 \wedge 0) \vee (0.34 \wedge 0.34) \vee (0.7 \wedge 0.425) \vee (1 \wedge 0.1125) = 0.425 \\ \beta &= (0 \wedge 0) \vee (0.34 \wedge 0.34) \vee (0.7 \wedge 0.5875) \vee (1 \wedge 0.275) = 0.5875 \\ \gamma &= (0 \wedge 0) \vee (0.34 \wedge 0.34) \vee (0.7 \wedge 0.7) \vee (1 \wedge 0.5875) = 0.7 \\ \delta &= (0 \wedge 0) \vee (0.34 \wedge 0.3125) \vee (0.7 \wedge 0.625) \vee (1 \wedge 0.9375) = 0.9375 \end{aligned}$$

καταλήγοντας έτσι στο ίδιο αποτέλεσμα με την (2.9). Αντίστοιχα μπορεί να γίνουν και οι άλλες δύο συνθέσεις.

Ας συνεχίσουμε με την σύνθεση δύο σχέσεων. Από εδώ και πέρα με το συμβολισμό $R \in F(X \times Y)$ θα εννοούμε ότι R είναι μια σχέση ορισμένη στα σύνολα X και Y με αυτή τη σειρά.

Ορισμός 2.32 *Έστω δύο σχέσεις $R_1 \in F(X \times Y)$ και $R_2 \in F(Y \times Z)$. Τότε η sup-min σύνθεση $R_1 \circ R_2 \in F(X \times Z)$ ορίζεται ως η σχέση με συνάρτηση συμμετοχής*

$$(R_1 \circ R_2)(x,z) = \sup_{y \in Y} \min \{R_1(x,y), R_2(y,z)\}.$$

Τελείως ανάλογα ορίζονται η $max - prod$ και η $max - average$ συνθέσεις σχέσεων.

Παράδειγμα 2.33 *Έστω $X = \{$Τάσος, Γιώργος, Βασίλης$\}$, $Y = \{$Κώστας, Δημήτρης$\}$, $Z = \{$Γρηγόρης, Αντώνης$\}$. Ας θεωρήσουμε την σχέση ομοιότητας (κατά πόσο ο x μοιάζει εμφανισιακά με τον y) R_1 μεταξύ των X και Y και μια αντίστοιχη σχέση R_1 μεταξύ Y και Z.*

R_1	*Κώστας*	*Δημήτρης*
Τάσος	*0.3*	*0.7*
Γιώργος	*0.7*	*0.2*
Βασίλης	*0.4*	*0.5*

R_2	*Γρηγόρης*	*Αντώνης*
Κώστας	*0.8*	*0.2*
Δημήτρης	*0.4*	*0.7*

Η σύνθεση $R_1 \circ R_2$ των παραπάνω σχέσεων μας παράγει μια σχέση μεταξύ των X και Z.

$R_1 \circ R_2 =$

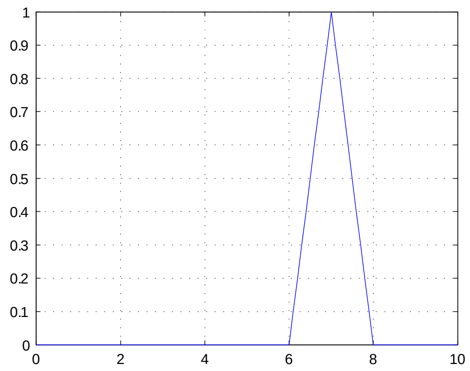
$R_1 \circ R_2$	*Γρηγόρης*	*Αντώνης*
Τάσος	*0.4*	*0.7*
Γιώργος	*0.7*	*0.2*
Βασίλης	*0.4*	*0.5*

2.4 Ασαφείς αριθμοί

Οι ασαφείς αριθμοί χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές όπου είναι επιθυμητή η αναπαράσταση της αβεβαιότητας των αριθμητικών δεδομένων. Ένας εύκολος τρόπος να φανταστούμε ένα ασαφή αριθμό είναι η έκφραση ''περίπου 7''. Ένας πιο αυστηρός ορισμός των ασαφών αριθμών είναι ο ακόλουθος.

Ορισμός 2.34 *Ένας ασαφής αριθμός A είναι ένα ασαφές σύνολο ορισμένο πάνω στους πραγματικούς αριθμούς με μια κανονική, κυρτή και συνεχή συνάρτηση συμμετοχής με πεπερασμένη υποστήριξη.*

Αντίστοιχα μπορεί να οριστεί ένας ασαφής ορισμός σε διακριτά απειροσύνολα όπως οι ακέραιοι αριθμοί. Όλες οι πράξεις ασαφών συνόλων που έχουμε ορίσει πιο πριν ισχύουν προφανώς και για τους ασαφείς αριθμούς. Ένας άλλος τρόπος για να συμβολίζουμε τους ασαφείς αριθμούς πχ τον 7 είναι με **7**. Επίσης ανάλογα με την εφαρμογή, ο καθένας μπορεί να διαλέξει διαφορετικές συναρτήσεις συμμετοχής για τον ίδιο ασαφή αριθμό.



Ο ασαφής αριθμός **7**.

Άλλος ένας τρόπος ορισμού του ασαφούς αριθμού **7** όταν τον ορίσουμε πάνω στους ακέραιους αριθμούς είναι ο ακόλουθος

$$\mathbf{7} = 0/1 + 0/2 + 0/3 + 0.2/4 + 0.4/5 + 0.7/6 + 1/7 + 0.7/8 + 0.4/9 + 0.2/10$$

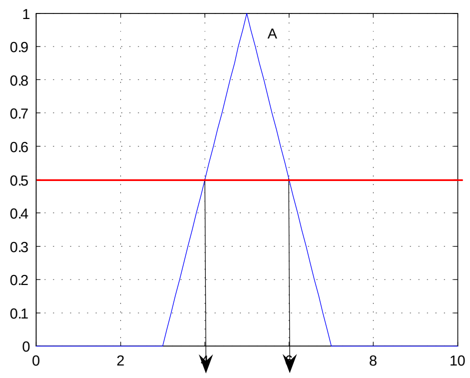
Ας συνεχίσουμε ορίζοντας τις a-τομές ενός ασαφούς συνόλου.

Ορισμός 2.35 *a-τομή ενός ασαφούς συνόλου A (και κατά συνέπεια ενός ασαφούς αριθμού A) όπου $\alpha \in [0,1]$, είναι ένα υποσύνολο A_α του συνόλου αναφοράς τέτοιο ώστε*

$$A_\alpha = [\alpha_1^{(a)}, \alpha_2^{(a)}] = \{x | \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

Έστω ένα ασαφές σύνολο που παριστάνει τον ασαφή αριθμό **7** και φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Τότε

$$A_{0.5} = [4, 6]$$



0.5-τομή του ασαφούς αριθμού **7**.

Αντίστοιχα $A_1 = [7]$ ή για να ακολουθείται ο ίδιος συμβολισμός $A_1 = [7, 7]$.

Ένας τρόπος να περιγράψουμε ένα διακριτό ασαφές σύνολο είναι μέσα ένα σύνολο τέτοιων a-τομών. Στα ακόλουθα θα ασχοληθούμε με διακριτούς ασαφής αριθμούς.

2.4.1 Πρόσθεση

Ορισμός 2.36 *Πρόσθεση δύο ασαφών αριθμών A και B που περιγράφονται με α-τομές είναι το ασαφές σύνολο $C = A + B$ που περιγράφεται από*

$$C_\alpha = A_\alpha + B_\alpha = [\alpha_1^{(a)}, \alpha_2^{(a)}] + [b_1^{(a)}, b_2^{(a)}] = \\ = [\alpha_1^{(a)} + b_1^{(a)}, \alpha_2^{(a)} + b_2^{(a)}], \forall \alpha \in [0,1]$$

Ένας άλλος ισοδύναμος τρόπος να κάνουμε πρόσθεση ασαφών αριθμών είναι μέσω του ακόλουθου τύπου

$$\mu_{A+B}(z) = \bigvee_{z=x+y} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)].$$

Παράδειγμα 2.37 *Έστω ο ασαφής αριθμός*

$$\mathbf{7} = A = 0/1{+}0/2{+}0/3{+}0/4{+}0.2/5{+}0.6/6{+}1/7{+}0.6/8{+}0.2/9{+}0/10{+}0/11{+}...$$

και ο

$$\mathbf{3} = B = 0.3/1 + 0.7/2 + 1/3 + 0.7/4 + 0.3/5 + 0/6 + 0/7 + 0/8 + ...$$

Ας υπολογίσουμε τον ασαφή αριθμό $(\mathbf{7} + \mathbf{3}) = C$. Ένας τρόπος αναπαράστασης των αριθμών είναι και ο ακόλουθος:

3 :

	0.3	*0.7*	*1*	*0.7*	*0.3*	*0*	*0*	*0*	*0*
1.0			*1*						
0.9			*1*						
0.8			*1*						
0.7		*1*	*1*	*1*					
0.6		*1*	*1*	*1*					
0.5		*1*	*1*	*1*					
0.4		*1*	*1*	*1*					
0.3	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*				
0.2	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*				
0.1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*				
0	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*

7 :

	0	*0*	*0*	*0*	*0.2*	*0.6*	*1*	*0.6*	*0.2*
1.0							*1*		
0.9							*1*		
0.8							*1*		
0.7							*1*		
0.6						*1*	*1*	*1*	
0.5						*1*	*1*	*1*	
0.4						*1*	*1*	*1*	
0.3						*1*	*1*	*1*	
0.2					*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
0.1					*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
0	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*

Σύμφωνα με τον ορισμό της πρόσθεσης έχουμε

$$C_{0.1} = A_{0.1} + B_{0.1} = [1, 5] + [5, 9] = [6, 14]$$

$$C_{0.2} = A_{0.2} + B_{0.2} = [1, 5] + [5, 9] = [6, 14]$$

$$C_{0.3} = A_{0.3} + B_{0.3} = [1, 5] + [6, 8] = [7, 13]$$

Συνεχίζοντας ανάλογα παρατηρούμε ότι

$$C_{0.4} = C_{0.5} = C_{0.6} = [8, 12]$$

$$C_{0.7} = [9, 11]$$

και

$$C_{0.8} = C_{0.9} = C_1 = [10]$$

Άρα

		0	0	0	0	0.2	0.2	0.6	0.6	0.7	1	0.7	0.6	0.6	0.2	0
	1.0										1					
	0.9										1					
	0.8										1					
	0.7									1	1	1				
	0.6							1	1	1	1	1	1	1		
7 :	0.5							1	1	1	1	1	1	1		
	0.4							1	1	1	1	1	1	1		
	0.3							1	1	1	1	1	1	1		
	0.2						1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	0.1						1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

ή αλλιώς

$$\mathbf{3} + \mathbf{7} = 0/1 + ... + 0/5 + 0.2/6 + 0.6/7 + 0.6/8 + 0.7/9 + \\ + 1/10 + 0.7/11 + 0.6/12 + 0.6/13 + 0.2/14 + 0/15.$$

2.4.2 Αφαίρεση

Ορισμός 2.38 *Αφαίρεση δύο ασαφών αριθμών A και B που περιγράφονται με α-τομές είναι το ασαφές σύνολο $C = A - B$ που περιγράφεται από*

$$C_\alpha = A_\alpha + B_\alpha = [\alpha_1^{(a)}, \alpha_2^{(a)}] - [b_1^{(a)}, b_2^{(a)}] = \\ = [\alpha_1^{(a)} - b_2^{(a)}, \alpha_2^{(a)} - b_1^{(a)}], \forall \alpha \in [0, 1]$$

Έτσι η πράξη $\mathbf{7} - \mathbf{3} = B - A$ γίνεται ως εξής:

$$C_{0.1} = A_{0.1} + B_{0.1} = [5, 9] - [1, 5] = [5 - 5, 9 - 1] = [0, 8]$$

Αντίστοιχα

$$C_{0.2} = C_{0.1}$$

και

$$C_{0.3} = [6,8] - [1,5] = [1,7]$$
$$C_{0.4} = C_{0.5} = C_{0.6} = [6,8] - [2,4] = [2,6]$$
$$C_{0.7} = [7,7] - [2,4] = [3,5]$$
$$C_{0.8} = C_{0.9} = C_1 = [4].$$

Άρα

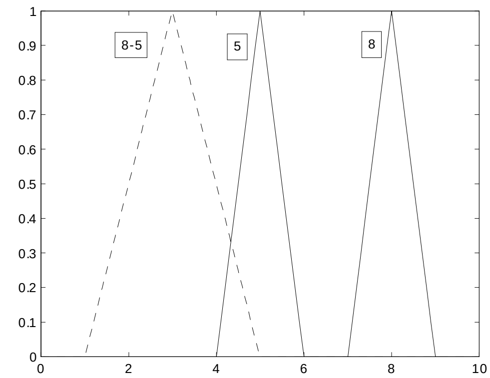
$$\mathbf{7} - \mathbf{3} = 0.2/0 + 0.3/1 + 0.6/2 + 0.7/3 + 1/4 + 0.7/5 + 0.6/6 + 0.3/7 + 0.2/8 + 0/9 + ...$$

ή αλλιώς

$\mathbf{7} - \mathbf{3}$:

	0.2	0.3	0.6	0.7	1	0.7	0.6	0.3	0.2	0	0
1.0					1						
0.9					1						
0.8					1						
0.7				1	1	1					
0.6			1	1	1	1	1				
0.5			1	1	1	1	1				
0.4			1	1	1	1	1				
0.3		1	1	1	1	1	1	1			
0.2	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
0.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Στο επόμενο σχήμα φαίνεται η αφαίρεση $\mathbf{8} - \mathbf{5}$ αν τα ασαφή σύνολα είναι συνεχή.



Αφαίρεση ασαφών αριθμών, $\mathbf{8} - \mathbf{5}$

2.4.3 Πολλαπλασιασμός

Όπως και στην αφαίρεση θα ορίσουμε τον πολλαπλασιασμό δύο ασαφών αριθμών μέσω των α-τομών.

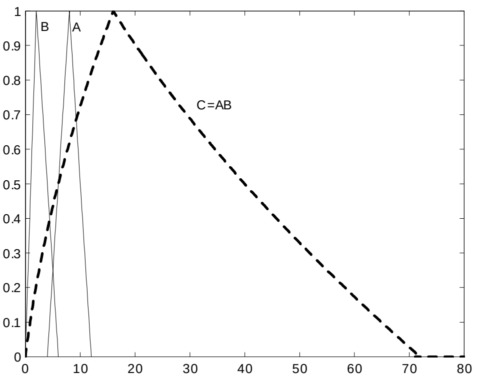
Ορισμός 2.39 *Πολλαπλασιασμός δύο ασαφών αριθμών A και B που περιγράφονται με a-τομές είναι το ασαφές σύνολο $C = A \cdot B$ που περιγράφεται από*

$$C_\alpha = A_\alpha \cdot B_\alpha = [\alpha_1^{(a)}, \alpha_2^{(a)}] \cdot [b_1^{(a)}, b_2^{(a)}] = \\ = [\alpha_1^{(a)} \cdot b_1^{(a)}, \alpha_2^{(a)} \cdot b_2^{(a)}], \forall \alpha \in [0,1]$$

Αντίστοιχα ορίζεται και ο πολλαπλασιασμός μεταξύ ασαφούς αριθμού A και ενός κανονικού αριθμού k ως εξής

$$C = k \cdot A := [k,k] \cdot [\alpha_1^{(a)}, \alpha_2^{(a)}] = [k\alpha_1^{(a)}, k\alpha_2^{(a)}].$$

Σαν παράδειγμα και χωρίς παραπάνω εξηγήσεις φαίνεται πιο κάτω ο πολλαπλασιασμός δύο συνεχών ασαφών αριθμών του **8** και του **2**.



Πολλαπλασιασμός ασαφών αριθμών

2.4.4 Διαίρεση

Ορισμός 2.40 *Διαίρεση δύο ασαφών αριθμών A και B που περιγράφονται με a-τομές είναι το ασαφές σύνολο $C = A/B$ που περιγράφεται από*

$$C_\alpha = A_\alpha / B_\alpha = [\alpha_1^{(a)}, \alpha_2^{(a)}]/[b_1^{(a)}, b_2^{(a)}] = \\ = \left[\frac{\alpha_1^{(a)}}{b_2^{(a)}}, \frac{\alpha_2^{(a)}}{b_1^{(a)}}\right], \forall \alpha \in [0,1]$$

2.4.5 Υπόλοιπες πράξεις

Αντίστοιχα μέσω των a-τομών ορίζονται και υπόλοιπες πράξεις μεταξύ ασαφών αριθμών όπως η εύρεση μεγίστου ή ελαχίστου κλπ.

2.5 Συνεπαγωγές

Έστω οι προτάσεις $p =$”x ανήκει στο σύνολο A” και $q =$”y ανήκει στο σύνολο B” όπου A και B είναι κλασσικά σύνολα. Η πρόταση ”p συνεπάγεται q” που θα συμβολίζεται $R : p \to q$, ερμηνεύεται ως $\neg(p \wedge \neg q)$ δηλαδή ότι δεν μπορεί να αληθεύει το p και να μην αληθεύει το q. Η πλήρης ερμηνεία της συνεπαγωγής είναι ότι ο βαθμός αλήθειας της $p \to q$ καθορίζει κατά πόσο το q αληθεύει τουλάχιστον κατά τον ίδιο βαθμό όσο το p δηλαδή

$$R : p \to q \text{ αληθές} \Leftrightarrow \tau(p) \leq \tau(q)$$

ή αλλιώς

$$R : p \to q = \begin{cases} 1, & \tau(p) \leq \tau(q) \\ 0, & \tau(p) > \tau(q) \end{cases}$$

όπου $\tau(p) = 0$ ή 1, ο βαθμός αλήθειας της πρότασης p. Παρατηρείστε ότι

$$\neg(p \wedge \neg q) = \neg p \vee q.$$

Το αριστερό τμήμα της συνεπαγωγής ονομάζεται το τμήμα της υπόθεσης ενώ το δεξί το τμήμα του συμπεράσματος. Έστω τώρα όλοι οι δυνατοί συνδιασμοί αλήθειας των προτάσεων p και q.

$\tau(p)$	$\tau(q)$
1	1
1	0
0	1
0	0

Τότε σύμφωνα με την κλασσική λογική ο πίνακας αλήθειας της φυσικής συνεπαγωγής είναι ο ακόλουθος

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p \to q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Ένας άλλος τρόπος για να γραφεί το παραπάνω είναι μέσω του ακόλουθου πίνακα:

$\tau(p \to q) =$

$p\backslash q$	0	1
0	1	1
1	0	1

Μια επέκταση της φυσικής συνεπαγωγής $R : p \to q$ χρησιμοποιώντας ασαφή σύνολα A και B ορισμένα πάνω στα X και Y αντίστοιχα είναι η σχέση R μεταξύ των A και B

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1, & \mu_A(x) \leq \mu_B(y) \\ 0, & \mu_A(x) > \mu_B(y) \end{cases} \tag{2.10}$$

που ονομάζεται **αυστηρή συνεπαγωγή**. Άλλη μια επέκταση της φυσικής συνεπαγωγής είναι η **συνεπαγωγή Gödel** όπου

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1, & \mu_A(x) \leq \mu_B(y) \\ \mu_B(y), & \mu_A(x) > \mu_B(y) \end{cases} \tag{2.11}$$

και η **συνεπαγωγή Larsen** όπου

$$\mu_R(x, y) = \mu_A(x)\mu_B(y). \tag{2.12}$$

Ο πιο διαδεδομένος τελεστής συνεπαγωγής στα ασαφή σύνολα είναι αυτός του **Mamdani** που ορίζεται από την ακόλουθη σχέση

$$\mu_R(x, y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}. \tag{2.13}$$

Ένας από τους λόγους για την ευρεία διάδοσή του είναι ότι είναι γρήγορος υπολογιστικά.

Ας θεωρήσουμε τώρα τα διακριτά ασαφή σύνολα $A = 1/0 + 0.8/1 + 0.5/2$ και $B = 0.2/0 + 0.8/1$. Τότε ο πίνακας αλήθειας της συνεπαγωγής $R : p \to q$ χρησιμοποιώντας τον τελεστή συνεπαγωγής του Mamdani είναι ο ακόλουθος

$R =$

$R : x\backslash y$	0	1
0	$min\{1, 0.2\}$	$min\{1, 0.8\}$
1	$min\{0.8, 0.2\}$	$min\{0.8, 0.8\}$
2	$min\{0.5, 0.2\}$	$min\{0.5, 0.8\}$

ή μετά από απλές πράξεις

$R =$

$R : x\backslash y$	0	1
0	0.2	0.8
1	0.2	0.8
2	0.2	0.5

Αντίστοιχα χρησιμοποιώντας τον τελεστή συνεπαγωγής του Larsen έχουμε

$R =$

$R : x\backslash y$	0	1
0	$1 \cdot 0.2$	$1 \cdot 0.8$
1	$0.8 \cdot 0.2$	$0.8 \cdot 0.8$
2	$0.5 \cdot 0.2$	$0.5 \cdot 0.8$

$=$

$R : x\backslash y$	0	1
0	0.2	0.8
1	$0,16$	0.64
2	0.1	0.4

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας αλήθειας της συνεπαγωγής έχει στοιχεία κοντά στο ένα (αληθή) στις περιπτώσεις για τις οποίες φαίνεται να "μιλάει" ο κανόνας. Έτσι στο παραπάνω παράδειγμα το αίτιο του κανόνα ασχολείται κυρίως με τα στοιχεία 0 και 1 του X ενώ το συμπέρασμα με το 1. Γι αυτό και στον R οι αντίστοιχες θέσεις είναι κοντά στο 1.

Αν τώρα έχουμε n το πλήθος ασαφείς συνεπαγωγές

$$\begin{aligned} R_1 &: p_1 \to q_1 \\ &.... \\ R_n &: p_n \to q_n \end{aligned}$$

τότε εννοείτε ότι συνδέονται μεταξύ τους με το λεκτικό Ή, δηλαδή ο συνολικός πίνακας αλήθειας προκύπτει από την ένωση των επιμέρους πινάκων με την προϋπόθεση πάντα ότι εμπλέκονται τα ίδια σύνολα κλασσικά σύνολα X και Y.

Έστω τώρα ότι στο τμήμα της υπόθεσης υπάρχουν παραπάνω από μία μεταβλητές δηλαδή έχουμε μια συνεπαγωγή της μορφής

$$R : \text{ΑΝ } x_1 \text{ είναι } A_1 \text{ ΚΑΙ } x_2 \text{ είναι } A_2 \text{ ΤΟΤΕ } y \text{ είναι } B$$

όπου $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, y \in Y$. Τότε η σύνθετη υπόθεση "ΑΝ x_1 είναι A_1 ΚΑΙ x_2 είναι A_2" ερμηνεύεται ως ένα ασαφές σύνολο A ορισμένο στο $X_1 \times X_2$ και με συνάρτηση συμμετοχής

$$\mu_A(x_1, x_2) = \mu_{A_1}(x_1) \wedge \mu_{A_2}(x_2)$$

όπου $\wedge$ ο τελεστής της τομής (Mamdani ή Larsen). Αν είχα το λεκτικό Ή, τότε θα χρησιμοποιούσα τον τελεστή της ένωσης δηλαδή

$$\mu_A(x_1, x_2) = \mu_{A_1}(x_1) \vee \mu_{A_2}(x_2).$$

Τότε ο πίνακας αλήθειας της συνεπαγωγής υπολογίζεται από

$$\mu_R(x_1, x_2, y) = \mu_R(\mu_A(x_1, x_2), \mu_B(y)) \tag{2.14}$$

Παράδειγμα 2.41 *Ας θεωρήσουμε τα διακριτά ασαφή σύνολα* $A_1 = 1/0+0.8/1+0.5/2$, $A_2 = 1/0 + 0.3/10$ *και* $B = 0.2/100 + 0.8/200$. *Έστω επίσης η συνεπαγωγή*

$$R : \text{ΑΝ } x_1 \text{ είναι } A_1 \text{ ΚΑΙ } x_2 \text{ είναι } A_2 \text{ ΤΟΤΕ } y \text{ είναι } B.$$

Θα υπολογίσω τον πίνακα αλήθειας της συνεπαγωγής, ο οποίος θα έχει τρεις διαστάσεις, χρησιμοποιώντας τελεστή τομής και συνεπαγωγής αυτόν του Mamdani. Υπολογίζω πρώτα τα βαθμούς αλήθειας της υπόθεσης

$$\mu_A(x_1, x_2) = \mu_{A_1}(x_1) \wedge \mu_{A_2}(x_2) = \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}.$$

Άρα πέρνοντας όλους τους συνδυασμούς των στοιχείων του X_1*και του* X_2 *έχω*

$$\begin{aligned}
\mu_A(0,0) &= 1 \wedge 1 = 1 \\
\mu_A(0,10) &= 1 \wedge 0.3 = 0.3 \\
\mu_A(1,0) &= 0.8 \wedge 1 = 0.8 \\
\mu_A(1,10) &= 0.8 \wedge 0.3 = 0.3 \\
\mu_A(2,0) &= 0.5 \wedge 1 = 0.5 \\
\mu_A(2,10) &= 0.5 \wedge 0.3 = 0.3
\end{aligned}$$

Έτσι ο πίνακας αλήθειας υπολογίζεται από τον τύπο (2.14) και μπορεί να γραφεί ως εξής

$R =$

$R : (x_1, x_2)\backslash y$	100	200
$(0,0)$	$min\{1, 0.2\}$	$min\{1, 0.8\}$
$(0,10)$	$min\{0.3, 0.2\}$	$min\{0.3, 0.8\}$
$(1,0)$	$min\{0.8, 0.2\}$	$min\{0.8, 0.8\}$
$(1,10)$	$min\{0.3, 0.2\}$	$min\{0.3, 0.8\}$
$(2,0)$	$min\{0.5, 0.2\}$	$min\{0.5, 0.8\}$
$(2,10)$	$min\{0.3, 0.2\}$	$min\{0.3, 0.8\}$

$R =$

$R : (x_1, x_2)\backslash y$	100	200
$(0,0)$	0.2	0.8
$(0,10)$	0.2	0.3
$(1,0)$	0.2	0.8
$(1,10)$	0.2	0.3
$(2,0)$	0.2	0.5
$(2,10)$	0.2	0.3

Έστω τώρα ότι εκτός του παραπάνω κανόνα υπάρχει και ένας δεύτερος της μορφής

$$R_2 : \text{ΑΝ } x_1 \text{ είναι } C_1 \text{ ΚΑΙ } x_2 \text{ είναι } C_2 \text{ ΤΟΤΕ } y \text{ είναι } D.$$

με πίνακα αλήθειας

$R_2 =$

$R_2 : (x_1, x_2)\backslash y$	100	200
$(0,0)$	0.1	0.9
$(0,10)$	0.6	0.2
$(1,0)$	0.2	0.8
$(1,10)$	0	0.3
$(2,0)$	0	0.8
$(2,10)$	0	0.3

Τότε ο συνολικός πίνακας συνεπαγωγής θα δίνεται από την ένωση των δύο ασαφών σχέσεων $R \cup R_2$. Δηλαδή αν χρησιμοποιήσω τελεστή ένωσης το max έχω:

$R \cup R_2 =$

$R \cup R_2 : (x_1, x_2) \backslash y$	100	200
$(0, 0)$	0.2	0.9
$(0, 10)$	0.6	0.3
$(1, 0)$	0.2	0.8
$(1, 10)$	0.2	0.3
$(2, 0)$	0.2	0.8
$(2, 10)$	0.2	0.3

2.6 Προσεγγιστικός συλλογισμός

Στην συμπερασματική συλλογιστική, δεδομένων αληθών προτάσεων το συμπέρασμα που βγαίνει δεν μπορεί να είναι ψευδές. Κλασσικό παράδειγμα συμπερασματικής συλλογιστικής είναι το ακόλουθο:

Πρόταση	Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί
Γεγονός	Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος
Συμπέρασμα	Ο Σωκράτης είναι θνητός

Ο έλεγχος διαδικασιών ή συστημάτων με ασαφείς ελεγκτές προϋποθέτει την ύπαρξη κάποιων λεκτικών κανόνων που περιγράφουν τις αντιδράσεις ενός ανθρώπου χειριστή. Αυτοί οι κανόνες περιγράφονται από ένα σύνολο προτάσεων της μορφής ”ΑΝ Α τότε Β”. Είναι προφανές ότι σε πολύπλοκες διαδικασίες δεν είναι γνωστοί όλοι οι κανόνες εκ των προτέρων. Άρα ζητείτε ένας μηχανισμός που μπορεί να παίρνει αποφάσεις με ελλιπή στοιχεία, κάτι που η ασαφής λογική αποδεικνύεται ότι μπορεί να κάνει.

Ας δούμε το παραπάνω πρόβλημα σε πλαίσια ασαφούς λογικής.

Έστω $x \in X$ και $y \in Y$ δύο αριθμητικές μεταβλητές όπου x πίεση και y όγκος. Έστω ότι ορίζουμε τα παρακάτω ασαφή σύνολα. A_1 το ασαφές σύνολο που λεκτικά περιγράφεται ως ”υψηλή πίεση”, A_2 ”χαμηλή πίεση”, B_1 ”μεγάλος όγκος”, B_2 ”μικρός όγκος”. Επίσης είναι γνωστή οι σχέσεις μεταξύ των ασαφών συνόλων δηλαδή

R_1 : ΑΝ x είναι A_1 ΤΟΤΕ y είναι B_1

R_2 : ΑΝ x είναι A_2 ΤΟΤΕ y είναι B_2

Το ζητούμενο είναι αν μας δίνεται ένα γεγονός ότι πχ x είναι $A^{'}$ όπου $A^{'}$ ένα νέο ασαφές σύνολο, να συμπεράνουμε το ποσοστό συμμετοχής του αποτελέσματος ότι π.χ. το y θα ανήκει κατά 0.3 σε ένα καινούριο ασαφές σύνολο $B^{'}$. Θα δούμε τρόπους για να υπολογίζουμε το νέο ασαφές σύνολο $B^{'}$ που αντιστοιχεί στο συμπέρασμα.

Στον προσεγγιστικό συλλογισμό και την ασαφή λογική ο σημαντικότερος κανόνας συνεπαγωγής είναι ο *Generalized Modus Ponens (GMP)* για τον οποίο ισχύει

Πρόταση R :	ΑΝ x είναι A ΤΟΤΕ y είναι B
Γεγονός	x είναι $A^{'}$
Συμπέρασμα	y είναι $B^{'}$

Στόχος είναι η εύρεση ενός συμπεράσματος έχοντας σαν δεδομένα τα αίτια. Το συμπέρασμα $B^{'}$ προκύπτει από την σύνθεση του $A^{'}$ και του πίνακα αλήθειας της συνεπαγωγής. Η σύνθεση όπως έχουμε ήδη πει μπορεί να οριστεί με διάφορους τελεστές. Αν χρησιμοποιούμε τον τελεστή σύνθεσης $max - min$ του Mamdani (2.6), έχουμε

$$B^{'} = A^{'} \circ (A \to B) \tag{2.15}$$

όπου $\circ$ η $sup - min$ ή αλλιώς $max - min$ σύνθεση ενός ασαφούς συνόλου A με μια σχέση R, την συνεπαγωγή $(A \to B)$, δηλαδή η συνάρτηση συμμετοχής του νέου ασαφούς συνόλου $B^{'}$ είναι

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in X} \min\{\mu_{A'}(x), R(x,y)\}. \tag{2.16}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή συνεπαγωγής $max - prod$ του Larsen (2.7) έχουμε ότι

$$\mu_{B'}(y) = A^{'} \cdot (A \to B) = \sup_{x \in X} \mu_{A'}(x) R(x,y). \tag{2.17}$$

ενώ με τον τελεστή max $-average$ (2.8) έχουμε

$$\mu_{B'}(y) = A^{'} < + > (A \to B) = \sup_{x \in X} \left[\frac{1}{2}(\mu_{A'}(x) + R(x,y))\right]. \tag{2.18}$$

Παράδειγμα 2.42 *Έστω ο κανόνας R :"ΑΝ x είναι υψηλή πίεση ΤΟΤΕ y είναι χαμηλός όγκος" όπου τα ασαφή σύνολα "υψηλή πίεση" και "χαμηλός όγκος" ορίζονται αντίστοιχα από τα ασαφή σύνολα $A = 0/0 + 0.3/2 + 0.6/4 + 0.9/6 + 1/8$ και $B = 1/0 + 0.8/1 + 0.6/2 + 0.3/3 + 0/4$. Αν χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή συνεπαγωγής του Mamdani έχουμε σύμφωνα με την 2.13 ότι ο πίνακας αλήθειας της συνεπαγωγής είναι*

$R = A \to B$	0	1	2	3	4
0	$0 \wedge 1$	$0 \wedge 0.8$	$0 \wedge 0.6$	$0 \wedge 0.3$	$0 \wedge 0$
2	$0.3 \wedge 1$	$0.3 \wedge 0.8$	$0.3 \wedge 0.6$	$0.3 \wedge 0.3$	$0.3 \wedge 0$
4	$0.6 \wedge 1$	$0.6 \wedge 0.8$	$0.6 \wedge 0.6$	$0.6 \wedge 0.3$	$0.6 \wedge 0$
6	$0.9 \wedge 1$	$0.9 \wedge 0.8$	$0.9 \wedge 0.6$	$0.9 \wedge 0.3$	$0.9 \wedge 0$
8	$1 \wedge 1$	$1 \wedge 0.8$	$1 \wedge 0.6$	$1 \wedge 0.3$	$1 \wedge 0$

όπου $0 \wedge 1 = \min\{0, 1\}$ δηλαδή

$R = A \to B$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
2	0.3	0.3	0.3	0.3	0
4	0.6	0.6	0.6	0.3	0
6	0.9	0.8	0.6	0.3	0
8	1	0.8	0.6	0.3	0

Αν έχουμε σαν γεγονός ότι "x είναι πολύ υψηλή πίεση" όπου "υψηλή πίεση" το $A^{'} = 0/0 + 0.09/2 + 0.36/4 + 0.81/6 + 1/8$, τότε το συμπέρασμα σύμφωνα με την (2.15) είναι $B^{'} = A^{'} \circ R$ και η συνάρτηση συμμετοχής της παράγεται από την (2.16).

$$B^{'} = (0/0 + 0.09/2 + 0.36/4 + 0.81/6 + 1/8) \circ \begin{array}{c||c|c|c|c|c} R & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0 \\ 4 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.3 & 0 \\ 6 & 0.9 & 0.8 & 0.6 & 0.3 & 0 \\ 8 & 1 & 0.8 & 0.6 & 0.3 & 0 \end{array}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της max − min *σύνθεσης έχουμε:*

$$B^{'} = SUP_X \begin{array}{c||c|c|c|c|c} R & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 \wedge 0 & 0 \wedge 0 & 0 \wedge 0 & 0 \wedge 0 & 0 \wedge 0 \\ 2 & 0.09 \wedge 0.3 & 0.09 \wedge 0.3 & 0.09 \wedge 0.3 & 0.09 \wedge 0.3 & 0.09 \wedge 0 \\ 4 & 0.36 \wedge 0.6 & 0.36 \wedge 0.6 & 0.36 \wedge 0.6 & 0.36 \wedge 0.3 & 0.36 \wedge 0 \\ 6 & 0.81 \wedge 0.9 & 0.81 \wedge 0.8 & 0.81 \wedge 0.6 & 0.81 \wedge 0.3 & 0.81 \wedge 0 \\ 8 & 1 \wedge 1 & 1 \wedge 0.8 & 1 \wedge 0.6 & 1 \wedge 0.3 & 1 \wedge 0 \end{array} \tag{2.19}$$

και άρα

$B^{'} = SUP_X$

R	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
2	0.09	0.09	0.09	0.09	0
4	0.36	0.36	0.36	0.3	0
6	0.81	0.8	0.6	0.3	0
8	1	0.8	0.6	0.3	0

Τέλος υπολογίζουμε το max σε κάθε στήλη του πίνακα και έχουμε ότι

$$B^{'} = 0.81/0 + 0.8/1 + 0.6/2 + 0.3/3 + 0/4.$$

Αν αντί για τον τελεστή συνεπαγωγής του Mamdani χρησιμοποιούσαμε αυτόν του Larsen τότε η σχέση (2.19) γίνεται

SUP_X

R	0	1	2	3	4
0	$0 \cdot 0$	$0 \cdot 0$	$0 \cdot 0$	$0 \cdot 0$	$0 \cdot 0$
2	$0.09 \cdot 0.3$	$0.09 \cdot 0.3$	$0.09 \cdot 0.3$	$0.09 \cdot 0.3$	$0.09 \cdot 0$
4	$0.36 \cdot 0.6$	$0.36 \cdot 0.6$	$0.36 \cdot 0.6$	$0.36 \cdot 0.3$	$0.36 \cdot 0$
6	$0.81 \cdot 0.9$	$0.81 \cdot 0.8$	$0.81 \cdot 0.6$	$0.81 \cdot 0.3$	$0.81 \cdot 0$
8	$1 \cdot 1$	$1 \cdot 0.8$	$1 \cdot 0.6$	$1 \cdot 0.3$	$1 \cdot 0$

SUP_X

R	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
2	0.027	0.027	0.027	0.027	0
4	0.216	0.216	0.216	0.108	0
6	0.729	0.648	0.486	0.243	0
8	1	0.8	0.6	0.3	0

$$B^{'} = 0.729/0 + 0.648/1 + 0.486/2 + 0.243/3 + 0/4.$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου το γεγονός $A^{'}$ είναι ασαφές στοιχείο (singleton) όπως ορίστηκε στην σχέση (2.1).

Συνεχίζοντας το προηγούμενο παράδειγμα, θεωρούμε ότι το γεγονός είναι ένα ασαφές στοιχείο, δηλαδή

$$A^{'} = 0/0 + 0/2 + 0/4 + 1/6 + 0/8.$$

Τότε ο **βαθμός εκπλήρωσης του κανόνα** είναι ο αριθμός α

$$\alpha = \max\left(\mu_A(x) \wedge \mu_{A'}(x), \text{ για κάθε } x \in X\right)$$

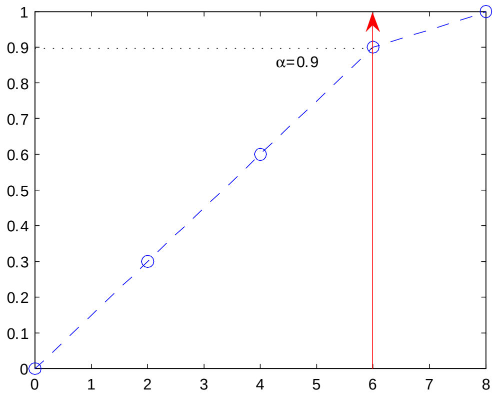
όταν έχω $max - min$ σύνθεση. Άρα αν $\wedge$ είναι ο τελεστής ελαχίστου, έχουμε ότι

$$\mu_A(x) \wedge \mu_{A'}(x) = 0/0 + 0/2 + 0/4 + 0.9/6 + 0/8$$

και άρα

$$\alpha = \max(0, 0, 0, 0.9, 0) = 0.9.$$

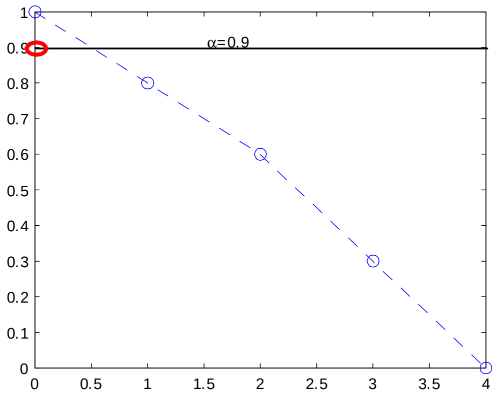
Η παραπάνω διαδικασία φαίνεται εύκολα στο επόμενο σχήμα.



Το $B^{'}$ τώρα παράγεται από το ελάχιστο μεταξύ των ποσοστών συμμετοχής κάθε στοιχείου με το $\alpha = 0.9$

$$\mu_{B'}(y) = min\{0.9, \mu_B(x)\} \tag{2.20}$$

και έτσι έχω



δηλαδή

$$B^{'} = 0.9/0 + 0.8/1 + 0.6/2 + 0.3/3 + 0/4.$$

Ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε κάνοντας κανονικά την σύνθεση $B^{'} = A^{'} \circ R$.

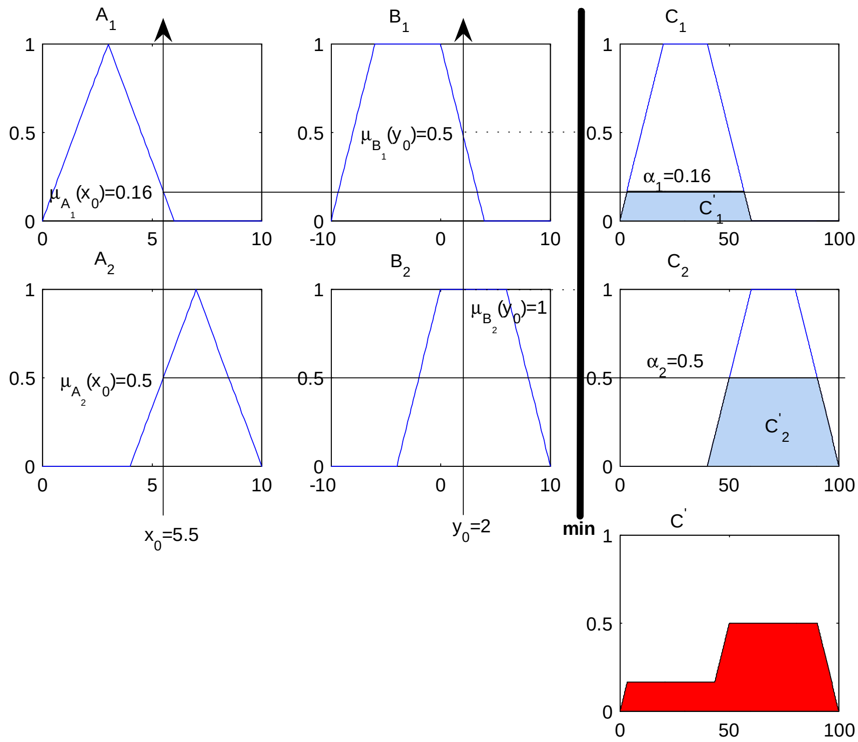
Η διαδικασία αυτή για $max - min$ σύνθεση, δύο κανόνες της μορφής

$$\begin{array}{lcl} \text{ΑΝ } x \text{ είναι } A_1 \text{ ΚΑΙ } y \text{ είναι } B_1 & \Rightarrow & z \text{ είναι } C_1 \\ \text{ΑΝ } x \text{ είναι } A_1 \text{ ΚΑΙ } y \text{ είναι } B_1 & \Rightarrow & z \text{ είναι } C_1 \end{array}$$

εισόδους τα ακόλουθα singletons

$$A^{'} = \begin{cases} 1, x = 5.5 \\ 0, x \neq 5.5 \end{cases}$$

$$B^{'} = \begin{cases} 1, y = 2 \\ 0, y \neq 2 \end{cases}$$



Σχήμα 2.7: Βαθμός εκπλήρωσης κανόνων με max-min σύνθεση.

όπου οι μεταβλητές εισόδου ορίζονται στα $X_1 = [0, 10], X_2 = [-10, 10]$ και εξόδου στο $Y = [0, 100]$, φαίνεται στο σχήμα 2.7.Ο βαθμός εκπλήρωσης του πρώτου κανόνα είναι

$$\begin{aligned} a_1 &= \min\{\mu_{A_1}(5.5), \mu_{B_1}(2)\} = 0.16 \\ a_2 &= \min\{\mu_{A_2}(5.5), \mu_{B_2}(2)\} = 0.5 \end{aligned}$$

Επιλέχθηκε το ελάχιστο εξαιτίας του ΚΑΙ μεταξύ των κανόνων. Η έξοδος του κάθε κανόνα θα παράγεται από τα

$$\begin{aligned} C_1' &= \min\{a_1, \mu_{C_1}(z)\} \\ C_2' &= \min\{a_2, \mu_{C_2}(z)\} \end{aligned}$$

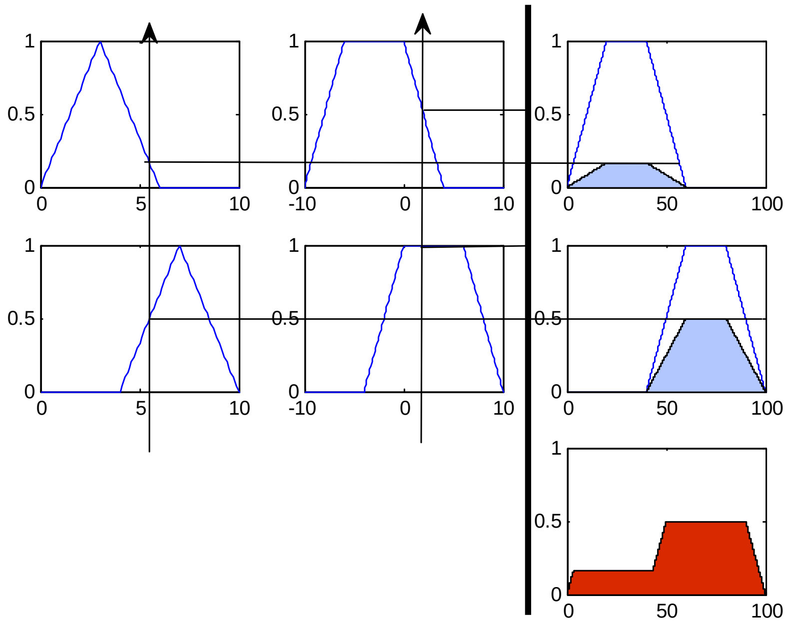
όπου το min γίνεται γιατί έχουμε $max - \mathbf{min}$ σύνθεση. Τελικά το αποτέλεσμα των δύο κανόνων υπολογίζεται από

$$C = C_1' \cup C_2'$$

χρησιμοποιώντας το μέγιστο δηλαδή

$$\mu_C(z) = \max\{\mu_{C_1'}(z), \mu_{C_2'}(z)\}.$$

Αντίστοιχα αν χρησιμοποιηθεί η $max - prod$ σύνθεση το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 2.8.Το μόνο που άλλαξε είναι ότι η αντίστοιχη της σχέσης (2.20) έγινε γινόμενο κάτι που



Σχήμα 2.8: Βαθμός εκπλήρωσης κανόνων με $max - prod$ σύνθεση.

φαίνεται από τα δεξιά μέρη του παραπάνω σχήματος.

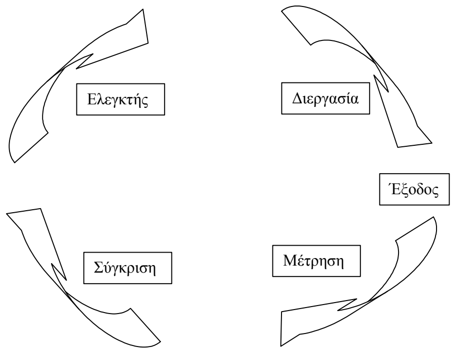
Το ”ψαλίδισμα” της συνάρτησης συμμετοχής εξαρτάται από το τελεστή συνεπαγωγής Mamdani που διαλέξαμε (2.20).

Θυμίζουμε ότι αν έχουμε παραπάνω από μία συνεπαγωγές $R^1, R^2, ..., R^n$ τότε ο συνδυασμός αυτών των σχέσεων γίνεται με ”OR” συνήθως χρησιμοποιώντας τον τελεστή max. Αν έχουμε παραπάνω από ένα αίτιο δηλαδή αν έχω τον κανόνα R :”AN x_1 είναι υψηλή πίεση ΚΑΙ x_2 είναι χαμηλή θερμοκρασία TOTE y είναι χαμηλός όγκος” όπου τα x_1, x_2 ανήκουν στα ασαφή σύνολα A_1 και A_2 αντίστοιχα και y στο B, τότε υπολογίζω πρώτα το $A = A_1 \cap A_1$ και μετά συνεχίζω όπως και παραπάνω (βλ. παράδειγμα 2.41).

2.7 Ασαφείς ελεγκτές

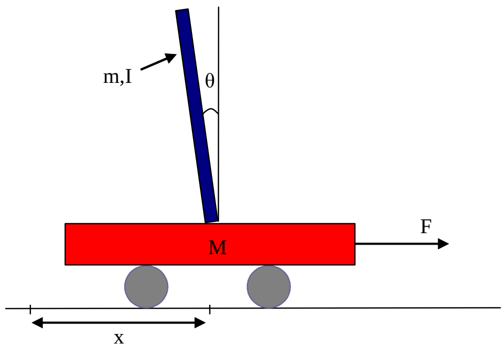
Ας θυμηθούμε έναν ορισμό ενός συστήματος αυτομάτου ελέγχου. Ένα τέτοιο σύστημα αντιστοιχεί στην διασύνδεση διαφόρων στοιχείων που συνθέτουν μια συγκεκριμένη διάταξη που μας παρέχει μια γνωστή εκ των προτέρων επιθυμητή απόκριση. Επειδή συνήθως η επιθυμητή απόκριση είναι διαφορετική από την πραγματική απόκριση, παράγεται ένα σήμα ελέγχου το οποίο αντιστοιχεί στο σφάλμα που εμφανίζεται ανάμεσα στις δύο αποκρίσεις. Η χρήση του σήματος αυτού για τον έλεγχο μιας συγκεκριμένης διεργασίας, έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία μιας ακολουθίας λειτουργιών μέσα σε ένα κλειστό βρόγχο που καλείται γενικά σύστημα ελέγχου με ανάδραση ή αλλιώς σύστημα ελέγχου κλειστού βρόγχου (Σχήμα 2.9).

Ένα σύστημα ανοιχτού βρόγχου λειτουργεί χωρίς ανάδραση και παράγει απευθείας το αντίστοιχο σήμα εξόδου ως απόκριση του συστήματος σε συγκεκριμένο σήμα εισό-



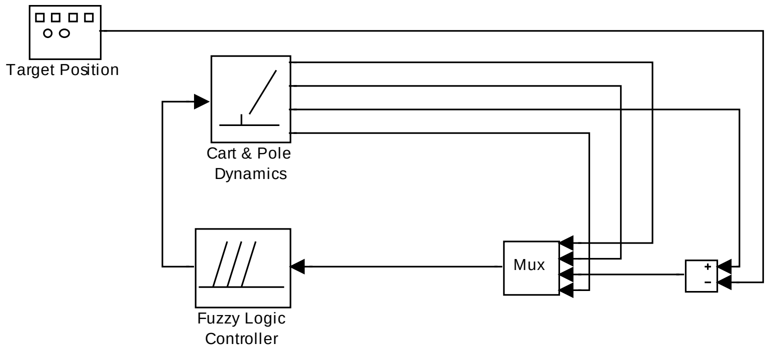
Σχήμα 2.9: Σύστημα ελέγχου με ανάδραση.

δου. Αντίθετα σε ένα σύστημα κλειστού βρόγχου (με ανάδραση) λαμβάνεται συνεχώς μια μέτρηση του σήματος εξόδου το οποίο και συγκρίνεται με την επιθυμητή έξοδο του συστήματος (σήμα εισόδου) έτσι ώστε να παράγεται ένα σήμα διαφοράς που εφαρμόζεται στην διαδικασία. Ένα κλασσικό παράδειγμα αυτομάτου ελέγχου είναι το ανάστροφο εκκρεμές. Έστω ένα καρότσι με ένα ανάστροφο εκκρεμές όπως στο παρακάτω σχήμα



Ανάστροφο εκκρεμές.

Το σύστημα έχει μια είσοδο, την οριζόντια δύναμη που εφαρμόζεται πάνω στο καρότσι και τέσσερις εξόδους, την θέση του καροτσιού, την γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την κατακόρυφο και τις παραγώγους των, δηλαδή την ταχύτητα του καροτσιού και την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου. Ο στόχος του ελέγχου είναι να σταματήσει όσο το δυνατόν πιο γρήγορα το καρότσι σε μια επιθυμητή θέση, έχοντας την ράβδο σε ισορροπία στην κατακόρυφο. Το παραπάνω μπορεί να γίνει με την ακόλουθη διάταξη ανάδρασης.



Ανάστροφο εκκρεμές με ανάδραση

Παρατηρούμε ότι η είσοδος στο κλειστό σύστημα είναι ένα σήμα που εκφράζει την επιθυμητή θέση του καροτσιού, ο (ασαφής) ελεγκτής παίρνει σαν εισόδους την ταχύτητα του καροτσιού, την γωνία και την ταχύτητα της ράβδου και την απόσταση που έχει το καρότσι από την επιθυμητή σχέση. Η έξοδος του ελεγκτή είναι η δύναμη που πρέπει να εφαρμοστεί στο καρότσι και αποτελεί την είσοδο στο σύστημα του ανάστροφου εκκρεμούς.

Τα βασικά στοιχεία ενός ασαφούς ελεγκτή είναι τα ακόλουθα:

- **Βάση γνώσης.** Σε αυτήν είναι αποθηκευμένοι οι κανόνες ελέγχου για το έλεγχο της διαδικασίας.
- **Ασαφή σύνολα.** Έχοντας ορίσει τα ασαφή σύνολα είναι δυνατή η μετάφραση των λεκτικών κανόνων της βάσης γνώσης σε μαθηματικούς κανόνες.
- **Ασαφοποιητής.** Αναλαμβάνει την μετατροπή των πραγματικών τιμών των μεταβλητών εισόδου του ελεγκτή σε ασαφή σύνολα.
- **Μηχανισμός συμπερασμού.** Εκεί παράγονται μέσω συνεπαγωγών τα ασαφή σύνολα των συμπερασμάτων.
- **Αποασαφοποιητής.** Τα ασαφή σύνολα των συμπερασμάτων μετατρέπονται σε πραγματικούς αριθμούς έτσι ώστε να είναι δυνατή η μετάδοση της δράσης ελέγχου στην διαδικασία.

2.7.1 Ασαφοποίηση εισόδων

Όπως είδαμε και στο προηγούμενο παράδειγμα με το ανάστροφο εκκρεμές, οι είσοδοι σε έναν ασαφή ελεγκτή είναι σήματα άρα σαφείς μεταβλητές, γι αυτό και απαιτείται σαν πρώτο βήμα η ασαφοποίησή των. Έστω ένας ελεγκτής με δύο εισόδους $x_1(t), ..., x_n(t)$ και μία έξοδο $y(t)$. Θεωρούμε ότι στην χρονική στιγμή t_0 έρχονται σαν είσοδος πραγματικές τιμές $x_1, ..., x_n$. Ο στόχος είναι να παράγουμε με βάση αυτούς τους αριθμούς ασαφή σύνολα $A_1^{'}, ..., A_n^{'}$. Ένας τρόπος να παραχθούν οι ασαφοποιημένες είσοδοι είναι να ορίσουμε τα $A_i^{'}$ σαν ασαφή σημεία (2.1) με την ακόλουθη συνάρτηση συμμετοχής

$$\mu_{A_i^{'}}(x_i(t)) = \begin{cases} 1 & , x_i(t) = x_i \\ 0 & x_i(t) \neq x_i \end{cases}$$

Ένας δεύτερος τρόπος ασαφοποίησης είναι το να λάβουμε υπόψη μας την αβεβαιότητα στα σήματα εισόδου θεωρώντας ότι έχουμε σαν είσοδο έναν ασαφή αριθμό.

2.7.2 Μηχανισμός συμπερασμού

Έστω n το πλήθος κανόνες που αντιστοιχούν στον ελεγκτή της μορφής "ΑΝ x_1 ΕΙΝΑΙ A_1^i ΚΑΙ x_2 ΕΙΝΑΙ A_2^i ΤΟΤΕ y ΕΙΝΑΙ B^i". Μεταξύ των κανόνων υπονοείται το συνδετικό "επίσης" που ερμηνεύεται σαν διάζευξη (OR). Οι κανόνες αυτοί αντιστοιχούν σε ασαφείς συνεπαγωγές R_i.

Ο μηχανισμός συμπερασμού για να οριστεί πλήρως χρειάζεται να οριστεί ο τελεστής συνεπαγωγής, ο τελεστής σύνθεσης που χρησιμοποιειται, το συνδετικό μεταξύ των n κανόνων, και ο τελεστής "ΚΑΙ" που ενώνει τις προϋποθέσεις των κανόνων.

Τελεστής "'Η"	Τελεστής "ΚΑΙ"	Τελεστής συνεπαγωγής	Τελεστής σύνθεσης
Mamdani (max) (2.4)	Mamdani (min) (2.2)	Αυστηρή (2.10)	Mamdani ($max - min$) (2.16)
$probor$ (2.5)	Larsen ($prod$) (2.3)	Gödel (2.11)	Larsen ($max - prod$) (2.17)
		Larsen ($prod$) (2.12)	$max - average$ (2.18)
		Mamdani (min) (2.13)	

Ο στόχος είναι να παραχθεί ένα ασαφές σύνολο σαν απόφαση του ελεγκτή με την βοήθεια τεχνικών που αναπτύχθηκαν στο εδάφιο 2.6.

2.7.3 Αποασαφοποίηση εξόδων

Για να προκύψει τελικά μια σαφής ενέργεια ελέγχου πρέπει στο ασαφές σύνολο C να εφαρμοστεί μια από τις παρακάτω τεχνικές αποασαφοποίησης.

Κέντρου βάρους (Center of area - Centroid). Η έξοδος υπολογίζεται από τον τύπο

$$z = \frac{\sum y_i \mu_C(y_i)}{\sum \mu_C(y_i)}$$

στην διακριτή και

$$z = \frac{\int y \mu_C(y)}{\int \mu_C(y)}$$

στην συνεχή περίπτωση. Πιο κάτω ακολουθεί ένα παράδειγμα αποασαφοποίησης του ασαφούς συνόλου `mf1` με την εντολή `defuzz`.

```
x = -10:0.1:10;
mf1 = trapmf(x,[-10 -8 -2 2]);
mf2 = trapmf(x,[-5 -3 2 4]);
mf3 = trapmf(x,[2 3 8 9]);
mf1 = max(0.5*mf2,max(0.9*mf1,0.1*mf3));
plot(x,mf1,'LineWidth',3);
set(gca,'YLim',[-1 1],'YTick',[0 .5 1])
x1 = defuzz(x,mf1,'centroid')
h1 = line([x1 x1],[-0.2 1.2],'Color','k');
t1 = text(x1,-0.2,' centroid','FontWeight','bold');
```

Αποασαφοποίηση μικρότερου των μεγίστων (Smallest of maxima - SOM). Είναι το μικρότερο σε απόλυτη τιμή από τα y_i που έχουν την μέγιστη τιμή συμμετοχής στο C.

```
x4 = defuzz(x,mf1,'som')
h4 = line([x4 x4],[-0.8 1.2],'Color','k');
t4 = text(x4,-0.8,' SOM','FontWeight','bold');
```

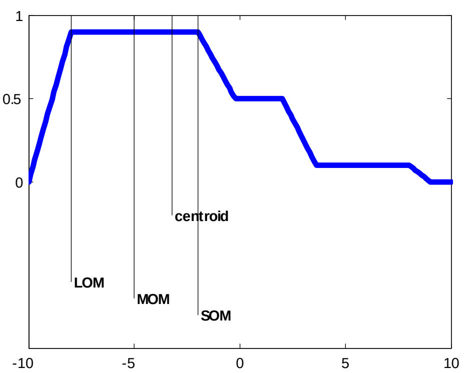
Αποασαφοποίηση μεγαλύτερου των μεγίστων (Largest of maxima - LOM). Είναι το μεγαλύτερο σε απόλυτη τιμή από τα y_i που έχουν την μέγιστη τιμή συμμετοχής στο C.

```
x5 = defuzz(x,mf1,'lom')
h5 = line([x5 x5],[-0.6 1.2],'Color','k');
t5 = text(x5,-0.6,' LOM','FontWeight','bold');
```

Αποασαφοποίηση μέσου των μεγίστων (Middle of maxima - MOM). Είναι ο μέσος όρος όλων των στοιχείων y_i $i = 1, ..., N$ που παίρνουν την μέγιστη τιμή στο C.

$$z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i$$

```
x3 = defuzz(x,mf1,'mom')
h3 = line([x3 x3],[-0.7 1.2],'Color','k');
t3 = text(x3,-0.7,' MOM','FontWeight','bold');
```



Διαφορετικές μέθοδοι αποασαφοποίησης.

2.7.4 Γνωστοί μηχανισμοί ασαφών ελεγκτών

Στην βιβλιογραφία υπάρχουν μερικοί γνωστοί μηχανισμοί ασαφών ελεγκτών μερικοί από τους οποίους συμπεριλαμβάνονται σε αυτά που έχουμε πει μέχρι στιγμής. Για απλότητα υποθέτουμε ότι έχουμε δύο κανόνες της μορφής:

R_1 : ΑΝ x είναι A_1 ΚΑΙ y είναι B_1 ΤΟΤΕ z είναι C_1

R_2 : ΑΝ x είναι A_2 ΚΑΙ y είναι B_2 ΤΟΤΕ z είναι C_2

Επίσης θεωρούμε ότι έχουμε σαν εισόδους στον ελεγκτή $x = x_0$ και $y = y_0$. Ο στόχος είναι να βρεθεί η αριθμητική έξοδος z.

Mamdani

Ασαφοποίηση	ασαφές σημείο
Τελεστής ”ΚΑΙ”	min
Τελεστής ”OR”	max
Τελεστής συνεπαγωγής	Mamdami (min)
Τελεστής σύνθεσης	$max - min$
Αποασαφοποίηση	Οτιδήποτε

Μια και έχω σαν είσοδο αριθμητικές τιμές οι οποίες μετά την ασαφοποίηση γίνονται ασαφή σημεία μπορώ να χρησιμοποιήσω τον τρόπο υπολογισμού της εξόδου με τα επίπεδα ενεργοποίησης. Μια και έχουμε τελεστή "ΚΑΙ" το min, τα επίπεδα ενεργοποίησης των κανόνων υπολογίζονται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \mu_{A_1}(x_0) \wedge \mu_{B_1}(y_0) \\
\alpha_1 &= \mu_{A_2}(x_0) \wedge \mu_{B_2}(y_0).
\end{aligned}
$$

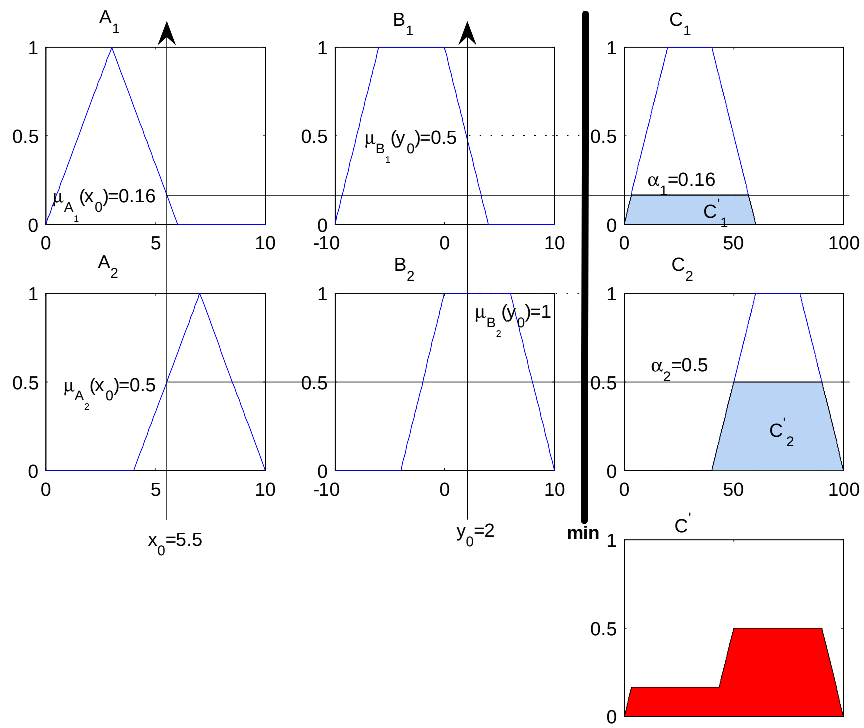
Οι έξοδος του κάθε κανόνα κανόνα είναι

$$
\begin{aligned}
\mu_{C_1'}(z) &= \alpha_1 \wedge \mu_{C_1}(z) \\
\mu_{C_2'}(z) &= \alpha_2 \wedge \mu_{C_2}(z).
\end{aligned}
$$

Τότε η συνολική έξοδος του ελεγκτή θα είναι

$$
\mu_{C'}(z) = \mu_{C_1'}(z) \vee \mu_{C_2'}(z)
$$

Η παραπάνω διαδικασία φαίνεται στο σχήμα 2.10, το οποίο παράγεται από τον ακόλουθο



Σχήμα 2.10: Ελεγκτής Mamdani.

κώδικα

```
x0=5.5;y0=2
x=0:0.1:10;A1=trimf(x,[0,3,6]);A2=trimf(x,[4,7,10])
```

```
y=-10:0.1:10;B1=trapmf(y,[-10,-6,0,4]);B2=trapmf(y
    ,[-4,0,6,10]);
z=0:0.1:100;C1=trapmf(z,[0,20,40,60]);C2=trapmf(z
    ,[40,60,80,100]);
energ1=min(A1(find(x==x0)),B1(find(y==y0)))
energ2=min(A2(find(x==x0)),B2(find(y==y0)))

C1dot=min(energ1,C1);C2dot=min(energ2,C2);
Cdot=max(C1dot,C2dot);

subplot(3,3,1);plot(x,A1)
subplot(3,3,2);plot(y,B1)
subplot(3,3,3);plot(z,C1,z,C1dot)
subplot(3,3,4);plot(x,A2)
subplot(3,3,5);plot(y,B2)
subplot(3,3,6);plot(z,C2,z,C2dot)
subplot(3,3,6);plot(z,C2,z,C2dot)
subplot(3,3,9);area(z,Cdot);axis([0,100,0,1])
```

Αν τώρα αλλάξουμε τα δύο ασαφή σύνολα C_1 και C_2 από τραπέζια σε Gauss προκύπτει το γράφημα 2.11:Η αποασαφοποίηση γίνεται εύκολα μέσω της εντολής `out1 = defuzz(z,Cdot,'type')` όπου `type` ένας από τους τρόπους αποασαφοποίησης που έχουμε δει. Έτσι σαν τελική έξοδο έχουμε:

Αποασαφοποίηση	**MATLAB** `type`	**Έξοδος**
Κέντρου βάρους	`centroid`	$z_0 = 56.18$
Μικρότερου των μεγίστων	`som`	$z_0 = 58.3$
Μεγαλύτερου των μεγίστων	`lom`	$z_0 = 81.7$
Μέσου των μεγίστων	`mom`	$z_0 = 70$

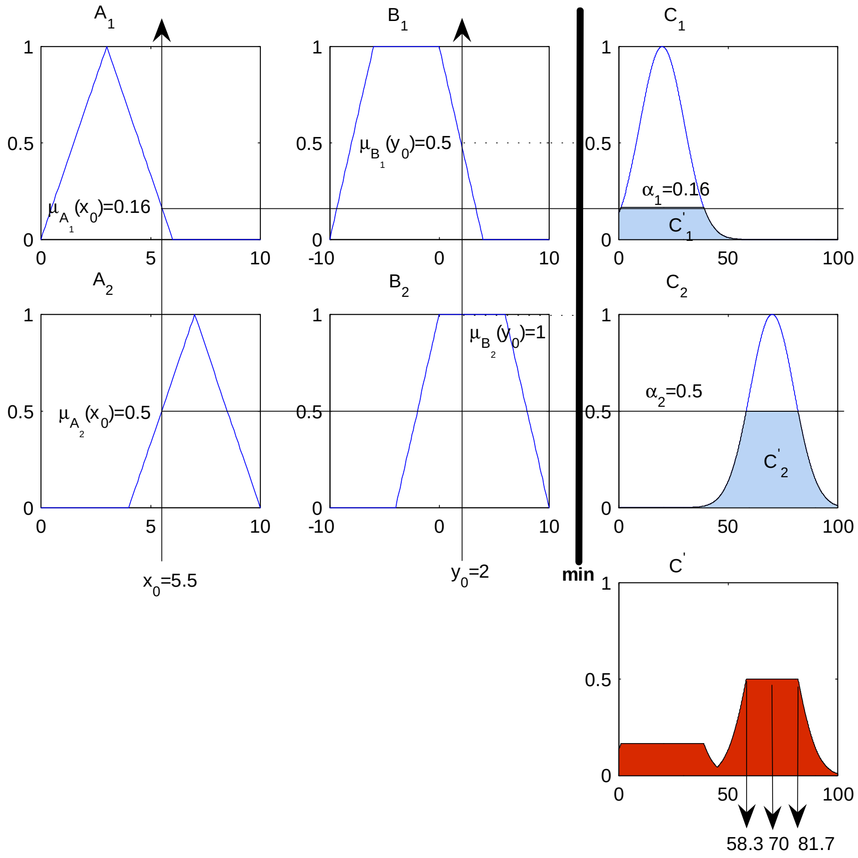
Για να γίνουν πιο σαφή τα παραπάνω για το διακριτό χρόνο ακολουθεί ένα αντίστοιχο παράδειγμα όπου τα ασαφή σύνολα δίνονται από τον ακόλουθο πίνακα.

[redacted]

Τότε χρησιμοποιώντας τον ελεγκτή Mamdani, προκύπτει το σχήμα 2.12.

Larsen

Ασαφοποίηση	ασαφές σημείο
Τελεστής ”ΚΑΙ”	min
Τελεστής ”OR”	max
Τελεστής συνεπαγωγής	Larsen (γινόμενο)
Τελεστής σύνθεσης	$max - min$
Αποασαφοποίηση	Οτιδήποτε



Σχήμα 2.11: Ελεγκτής Mamdani.

Μια και έχω σαν είσοδο αριθμητικές τιμές οι οποίες μετά την ασαφοποίηση γίνονται ασαφή σημεία μπορώ να χρησιμοποιήσω τον τρόπο υπολογισμού της εξόδου με τα επίπεδα ενεργοποίησης. Μια και έχουμε τελεστή "ΚΑΙ" το min, τα επίπεδα ενεργοποίησης των κανόνων υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \mu_{A_1}(x_0) \wedge \mu_{B_1}(y_0) \\
\alpha_1 &= \mu_{A_2}(x_0) \wedge \mu_{B_2}(y_0).
\end{aligned}$$

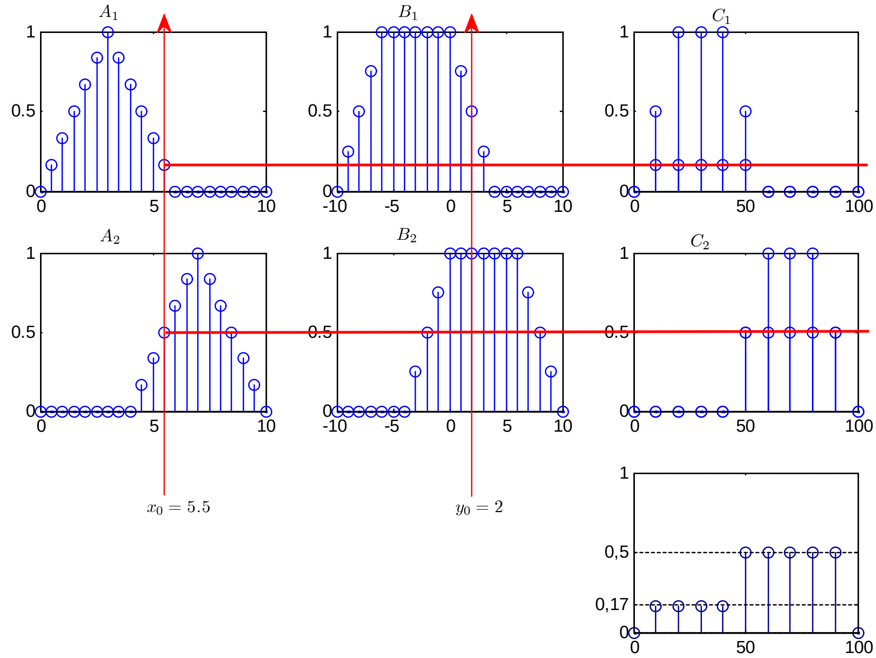
Οι έξοδος του κάθε κανόνα κανόνα είναι

$$\begin{aligned}
\mu_{C_1'}(z) &= \alpha_1 \cdot \mu_{C_1}(z) \\
\mu_{C_2'}(z) &= \alpha_2 \cdot \mu_{C_2}(z).
\end{aligned}$$

Τότε η συνολική έξοδος του ελεγκτή θα είναι

$$\mu_{C'}(z) = \mu_{C_1'}(z) \vee \mu_{C_2'}(z)$$

Η παραπάνω διαδικασία φαίνεται στο σχήμα 2.13



Σχήμα 2.12: Ελεγκτής Mamdani με διακριτά ασαφή σύνολα.

Το μόνο που αλλάζει στον κώδικα που δώσαμε στην περίπτωση του ελεγκτή Mamdani είναι η σειρά που υπολογίζει τα C_1' και C_2' η οποία και γίνεται

```
C1dot=energ1*C1;C2dot=energ2*C2;
```

Η έξοδος του ελεγκτή θα είναι

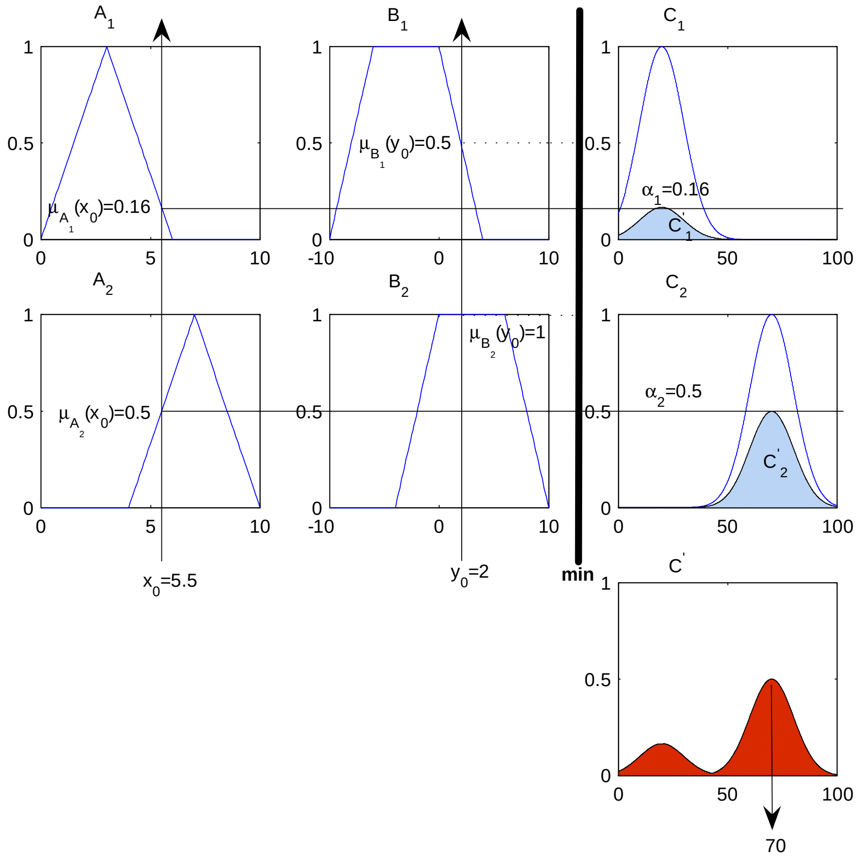
Αποασαφοποίηση	**MATLAB** `type`	**Έξοδος**
Κέντρου βάρους	`centroid`	$z_0 = 57.8$
Μικρότερου των μεγίστων	`som`	$z_0 = 70$
Μεγαλύτερου των μεγίστων	`lom`	$z_0 = 70$
Μέσου των μεγίστων	`mom`	$z_0 = 70$

Αντίστοιχα για τα διακριτά σύνολα προκύπτει το σχήμα 2.14.

Tsukamoto

Ο ελεγκτής του Tsukamoto θεωρεί σαν προϋπόθεση ότι όλα τα ασαφή σύνολα έχουν μονοτονικές συναρτήσεις συμμετοχής, δηλαδή να είναι είτε αύξουσες είτε φθίνουσες. Τα επίπεδα ενεργοποίησης των κανόνων υπολογίζονται όπως και πριν

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \mu_{A_1}(x_0) \wedge \mu_{B_1}(y_0) \\ \alpha_1 &= \mu_{A_2}(x_0) \wedge \mu_{B_2}(y_0). \end{aligned}$$



Σχήμα 2.13: Ελεγκτής Larsen.

Σε αυτή τη μέθοδο ελέγχου κάθε κανόνας παράγει μια αριθμητική έξοδο z_i η οποία υπολογίζεται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \mu_{C_1}(z_1) &= \alpha_1 \\ \mu_{C_1}(z_2) &= \alpha_2. \end{aligned} \tag{2.21}$$

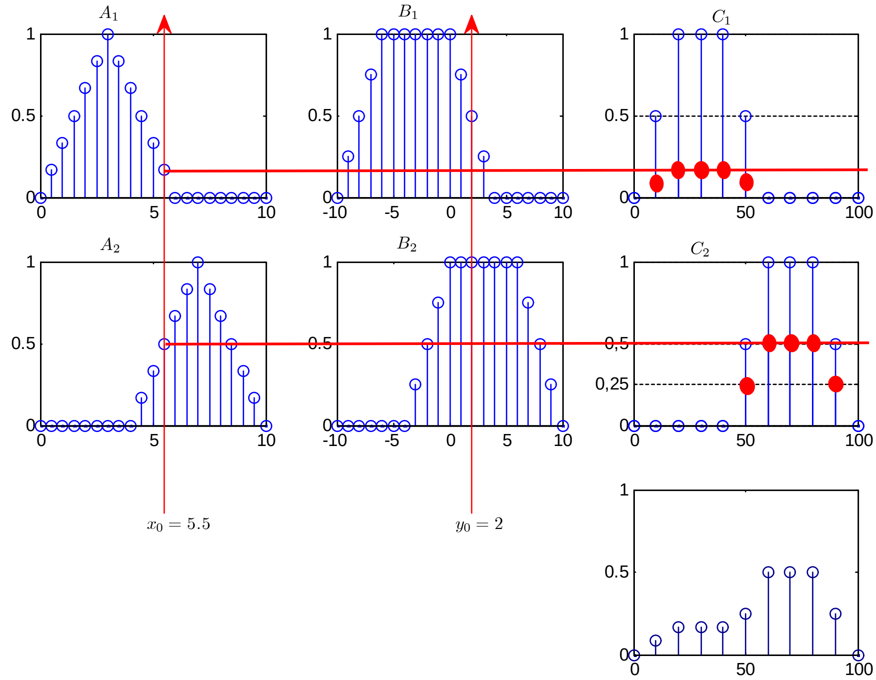
Από τις (2.21) βλέπουμε ότι τα z_i είναι οι τιμές που έχουν ποσοστό συμμετοχής στα ασαφή σύνολα C_i της εξόδου ίσο με α_i. Η τελική έξοδος υπολογίζεται από

$$z_0 = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Στο σχήμα 2.15 φαίνεται ένα παράδειγμα ελεγκτή με δύο κανόνες και δύο ασαφή σύνολα να συμμετέχουν στην δεξιά πλευρά των κανόνων.

Στο παραπάνω παράδειγμα θα είναι $z_0 = \frac{0.05 \cdot 37.7 + 0.14 \cdot 50.8}{0.05 + 0.14} = 47.353$.

```
x0=5.5;y0=2;
x=0:0.1:10;A1=gaussmf(x, [2.3 0]);A2=gaussmf(x, [2.3 10])
y=-10:0.1:10;B1=trapmf(y, [-15 -11 -6 3]);B2=trapmf(y, [-3
    6 11 19]);
```



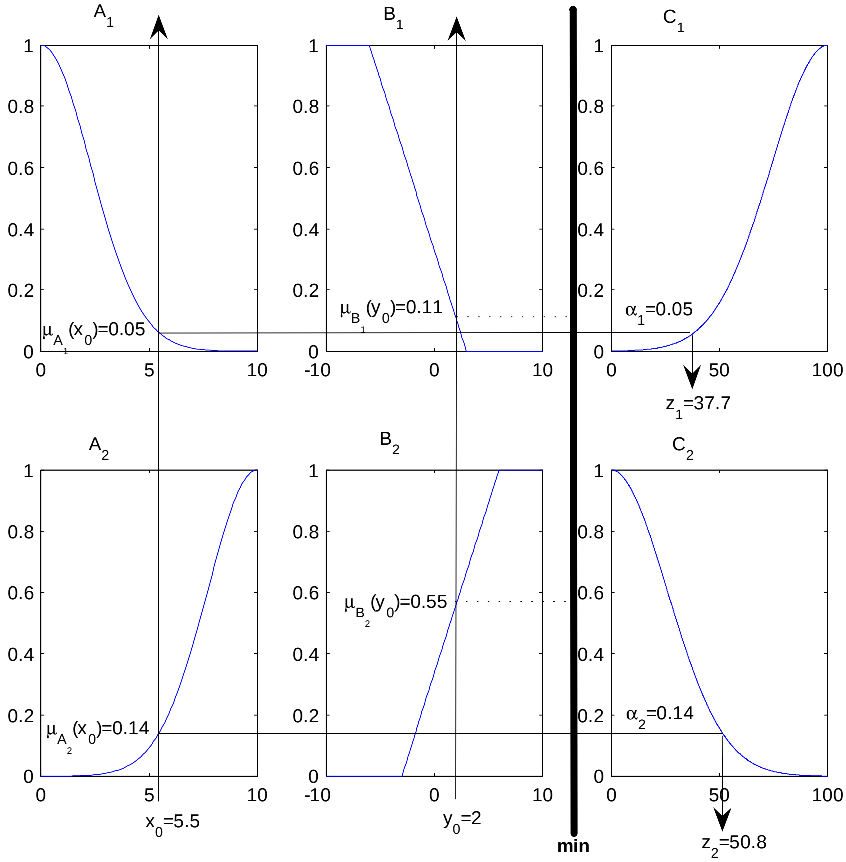
Σχήμα 2.14: Ελεγκτής Larsen με διακριτά σύνολα.

```
z=0:0.1:100;C1=gaussmf(z, [26 100]);C2=gaussmf(z, [26 0]);
energ1=min(A1(find(x==x0)),B1(find(y==y0)))
energ2=min(A2(find(x==x0)),B2(find(y==y0)))
z1=z(find(C1<energ1+0.001 & C1>energ1 -0.001,1))
z2=z(find(C2<energ2+0.001 & C2>energ2 -0.001,1))
subplot(2,3,1);plot(x,A1)
subplot(2,3,2);plot(y,B1)
subplot(2,3,3);plot(z,C1)
subplot(2,3,4);plot(x,A2)
subplot(2,3,5);plot(y,B2)
subplot(2,3,6);plot(z,C2)
```

Απλοποιημένος Sugeno-Takagi

Στην περίπτωση του απλοποιημένου Sugeno-Takagi η έξοδος του κάθε κανόνα είναι όχι ασαφές σύνολο αλλά πραγματικός αριθμός, δηλαδή $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Τα επίπεδα ενεργοποίησης υπολογίζονται όπως και πριν δηλαδή

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \mu_{A_1}(x_0) \wedge \mu_{B_1}(y_0)\\ \alpha_1 &= \mu_{A_2}(x_0) \wedge \mu_{B_2}(y_0).\end{aligned}$$



Σχήμα 2.15: Ελεγκτής Tsukamoto.

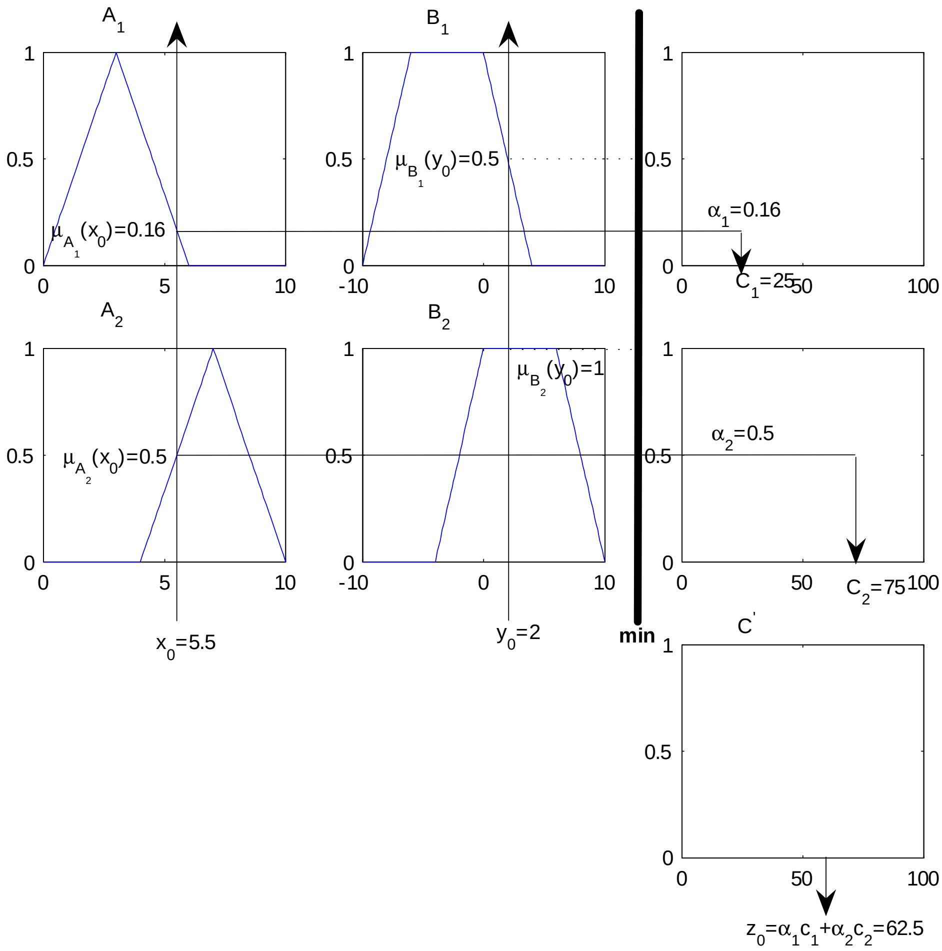
Η συνολική έξοδος δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$z_0 = \frac{\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

ή γενικότερα αν έχω n το πλήθος κανόνες έχω

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

Στο σχήμα **??** δίνεται ένα παράδειγμα ελεγκτή με δύο κανόνες και δύο ασαφή σύνολα να συμμετέχουν στην δεξιά πλευρά των κανόνων.



Σχήμα 2.16: Απλοποιημένος Sugeno-Takagi ελεγκτής.

2.8 Πραγματικά προβλήματα ελέγχου

2.8.1 Ασαφής έλεγχος ανάστροφου εκκρεμούς

Ας αρχίσουμε την μελέτη του ανάστροφου εκκρεμούς όπως παρουσιάστηκε πιο πάνω. Ένα μαθηματικό μοντέλο του εκκρεμούς είναι το ακόλουθο

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = \frac{mg\sin\theta(t)\cos\theta(t) - mL\theta^2(t)\sin\theta(t) - f(t)}{m\cos^2\theta(t) - (M+m)} \\ \ddot{\theta}(t) = \frac{-(M+m)g\sin\theta(t) + mL\theta^2(t)\sin\theta(t)\cos\theta(t) + f\cos\theta(t)}{mL\cos^2\theta(t) - (M+m)L} \end{cases}$$

όπου L το μήκος της ράβδου, M η μάζα του καροτσιού, m η μάζα της ράβδου, g η επιτάχυνση της βαρύτητας, $f(t)$ η οριζόντια δύναμη που εφαρμόζεται στο καρότσι, $\theta(t)$ η γωνία του εκκρεμούς και $y(t)$ η θέση του βαγονιού. Θέτουμε

$$L = 1$$

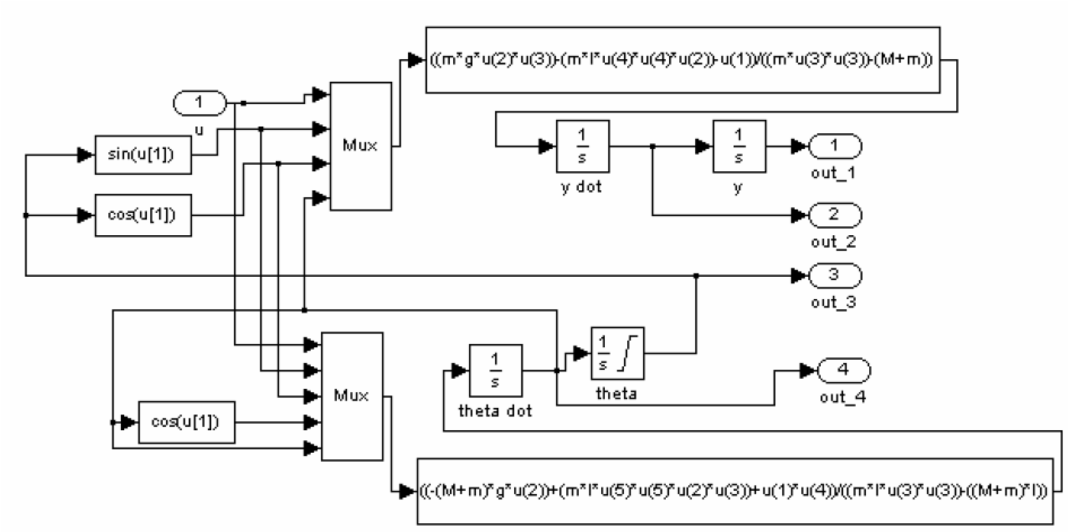
$$m = 0.1$$

$$M = 1$$

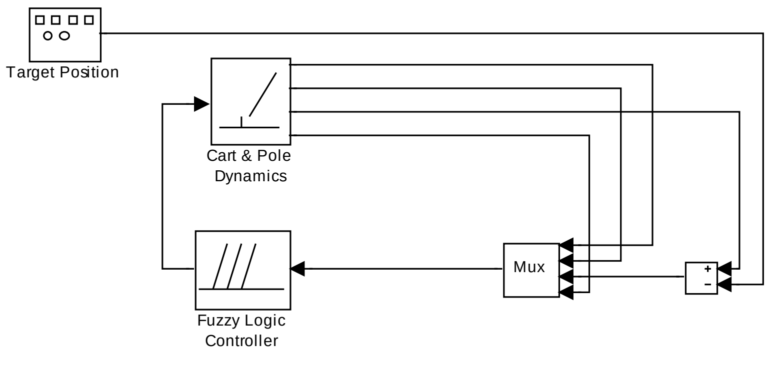
και

$$g = 9.8.$$

Το παραπάνω μοντέλο αν εισαχθεί στο SIMULINK έχει την ακόλουθη μορφή



Σαν είσοδο στο σύστημα θεωρούμε την δύναμη που εφαρμόζεται στο καρότσι και εξόδους διαλέγουμε τις $\theta(t), \dot{\theta}(t)$ και $y(t), \dot{y}(t)$. Ο στόχος είναι να βάζουμε εμείς μια νέα είσοδο $r(t)$ στο σύστημα που να δείχνει την επιθυμητή θέση του ανάστροφου εκκρεμούς και το καρότσι να σταματάει σε αυτή τη θέση όσο το δυνατόν πιο γρήγορα κρατώντας σε ισορροπία την ράβδο. Κάτι τέτοιο μπορεί να γίνει εφαρμόζοντας ανάδραση της μορφής



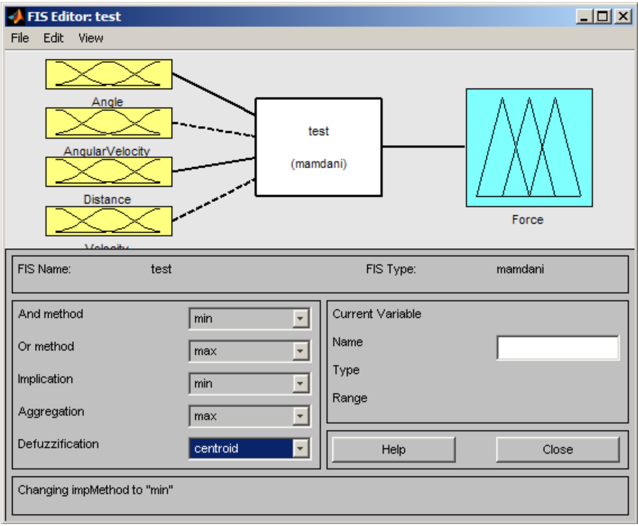
Ανάστροφο εκκρεμές με ανάδραση

και ένα ασαφή ελεγκτή που έχει σαν εισόδους τις $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $y(t) - r(t)$, $\dot{y}(t)$ και σαν είσοδο την δύναμη $f(t)$. Θα προχωρήσουμε στον σχεδιασμό του ασαφούς ελεγκτή.

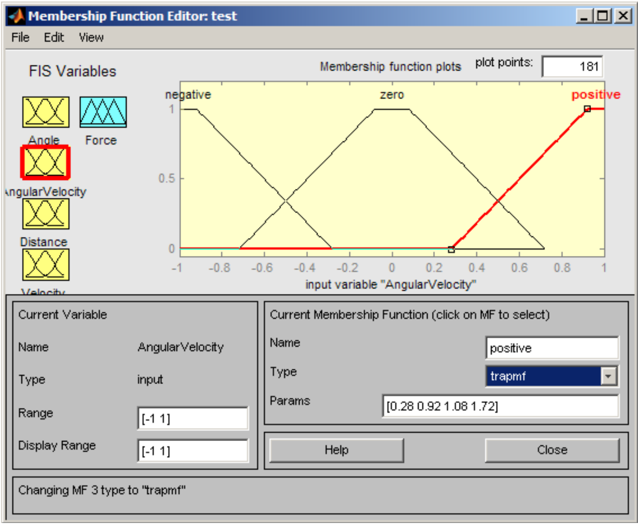
Το πρώτο πράγμα που πρέπει να αποφασίσουμε είναι τα διαστήματα στα οποία παίρνουν τιμές οι μεταβλητές μας. Από την σχεδίαση του συστήματος μας δίνεται ότι

$$\begin{aligned} \theta(t) &\in [-0.3, 0.3] \\ \dot{\theta}(t) &\in [-1, 1] \\ y(t) - r(t) &\in [-3, 3] \\ \dot{y}(t) &\in [-3, 3] \\ f(t) &\in [-30, 30]. \end{aligned}$$

Με την εντολή `fuzzy` του MATLAB ανοίγουμε τον *FIS Editor* που μας επιτρέπει να σχεδιάσουμε έναν ασαφή ελεγκτή. Προσθέτουμε τέσσερις εισόδους και μια έξοδο, μέθοδο συμπερασμού αυτή του Mamdani, αποσαφοποιητή κέντρου βάρους (Defuzzification -> centroid) και ονομάζουμε κατάλληλα τις μεταβλητές μας.



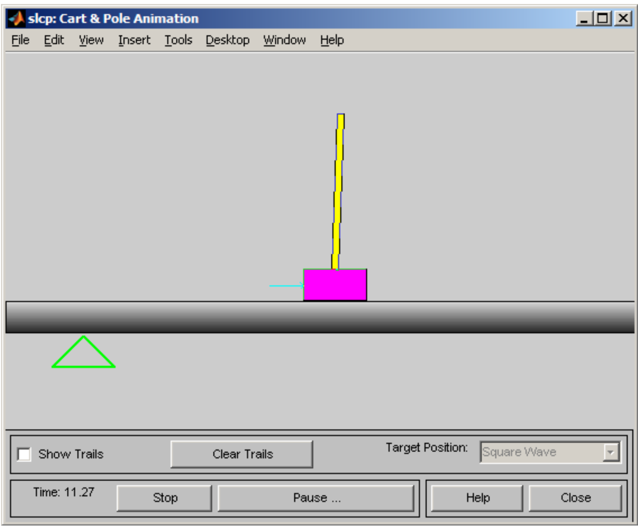
Έπειτα κάνοντας διπλό κλικ πάνω σε μια μεταβλητή ανοίγει ο *Membership function editor*. Προσθέτουμε σε κάθε μεταβλητή εισόδου τα κατάλληλα ασαφή σύνολα, πχ ”ΑΡΝΗΤΙΚΟ”, ”ΜΗΔΕΝ” και ”ΘΕΤΙΚΟ” διαλέγοντας τις αντίστοιχες συναρτήσεις συμμετοχής. Πιο κάτω φαίνονται οι συναρτήσεις συμμετοχής της γωνιακής ταχύτητας όπως σχεδιάστηκαν στο MATLAB.



Όσον αφορά την έξοδο, δοκιμάζουμε να ορίσουμε πέντε ασαφή σύνολα, τα ”ΠΟΛΥ ΑΡΝΗΤΙΚΟ”, ”ΑΡΝΗΤΙΚΟ”, ”ΜΗΔΕΝ”, ”ΘΕΤΙΚΟ”, ”ΠΟΛΥ ΘΕΤΙΚΟ”. Αφού οριστούν όλα τα σύνολα επόμενο βήμα, είναι ο ορισμός των λεκτικών κανόνων με βάση τους οποίους θα λειτουργεί ο ελεγκτής. Ας δοκιμάσουμε αρχικά να σχεδιάσουμε έναν ελεγκτή που λαμβάνει υπόψη του μόνο την γωνία της ράβδου και την θέση του καροτσιού. Οι κανόνες που θα εφαρμοστούν είναι της μορφής

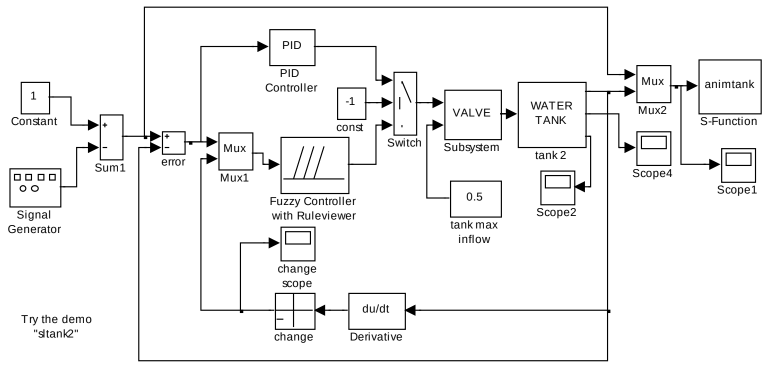
ΑΝ ΓΩΝΙΑ ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΓΩΝΙΑΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΣΗ ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΤΟΤΕ ΔΥΝΑΜΗ ΠΟΛΥ ΘΕΤΙΚΗ

Όλοι οι κανόνες της παραπάνω μορφής που μπορούν να οριστούν είναι $3^4 = 81$. Βλέπουμε ότι το πρόβλημα είναι αρκετά πολύπλοκο. Αφού σχεδιάσουμε πλήρως τον ελεγκτή, τον κάνουμε εξαγωγή στο MATLAB από το `File->Export->To Workspace` με ένα όνομα, έστω contr. Έπειτα δηλώνουμε στο SIMULINK κάνοντας διπλό κλικ πάνω στο `Fuzzy Logic Controller with Ruleviewer` ότι ο ελεγκτής είναι ο ”contr”. Ένας ολοκληρωμένος τέτοιος ελεγκτής υπάρχει σαν demo στο MATLAB τρέχοντας την εντολή `slcp`.



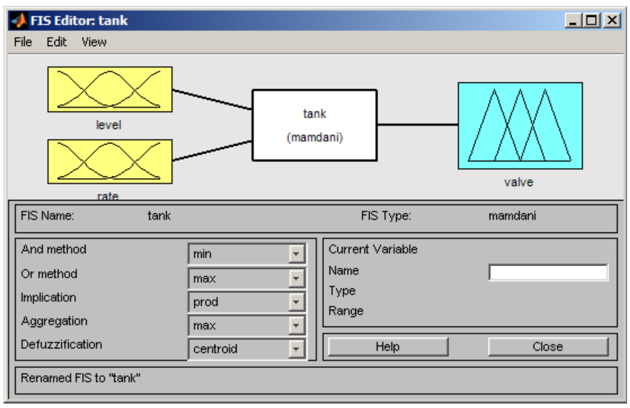
2.8.2 Έλεγχος στάθμης υγρών

Έστω μια δεξαμενή με δύο σωλήνες, ένας που παρέχει υγρό στην δεξαμενή και την παροχή του οποίου μπορούμε να την ελέγξουμε με μια βαλβίδα αποτελεί εξωτερική είσοδο στο σύστημα και ο άλλος που αδειάζει την με σταθερό ρυθμό δεξαμενή. Ο στόχος είναι να καταφέρουμε ανοιγοκλείνοντας την βαλβίδα να κρατήσουμε την στάθμη του υγρού σε επιθυμητά επίπεδα.



Simulink μοντέλο ελέγχου στάθμης υγρών.

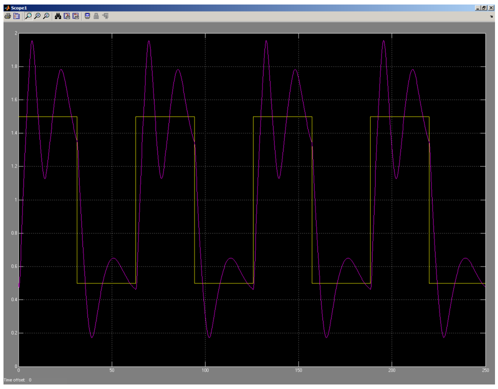
Το σύστημα αυτό υπάρχει έτοιμο στο MATLAB και τρέχει με την εντολή `sltankrule`. Ο ασαφής ελεγκτής έχει σαν εισόδους την στάθμη του νερού και τον ρυθμό μεταβολής της και σαν έξοδο τον ρυθμό με τον οποίο η βαλβίδα ανοίγει ή κλείνει.



Η στάθμη παίρνει τιμές στο $[-1, 1]$ ενώ ο ρυθμός μεταβολής της στο $[-0.1, 0.1]$, ενώ η έξοδος στο $[-1, 1]$. Δοκιμάζουμε αρχικά με τους τρεις επόμενους κανόνες

```
If (level is okay) then (valve is nochange) (1)
If (level is low) then (valve is openfast) (1)
If (level is high) then (valve is closefast) (1)
```

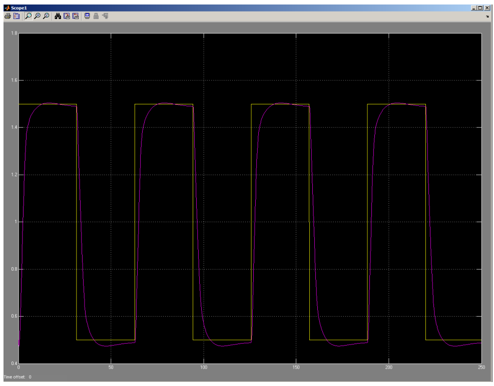
Παρατηρούμε ότι η στάθμη του υγρού κάνει ταλαντώσεις γύρω από την επιθυμητή στάθμη. Στο επόμενο σχήμα οι τετραγωνικοί παλμοί είναι η επιθυμητή στάθμη του υγρού ενώ οι σκούρα καμπύλη είναι η πραγματική στάθμη του υγρού



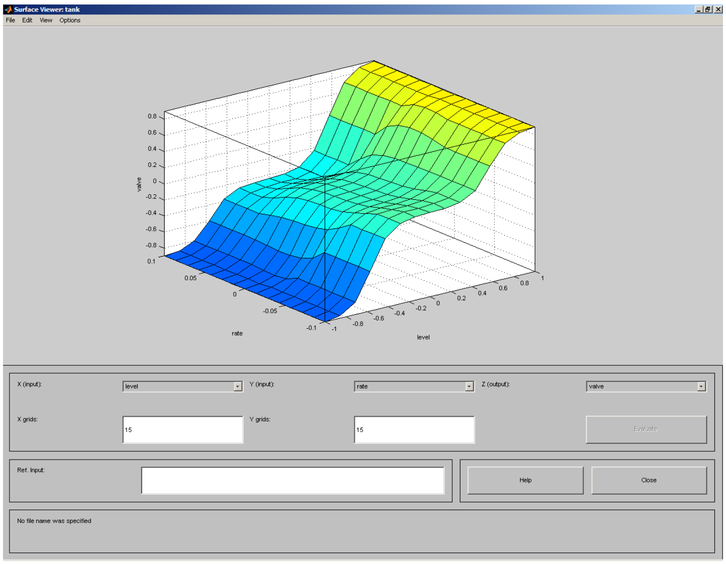
Προσθέτοντας και τους επόμενους δύο κανόνες

```
If (level is good) and (rate is negative), then (valve is
    closeslow) (1)
If (level is good) and (rate is positive), then (valve is
    openslow) (1)
```

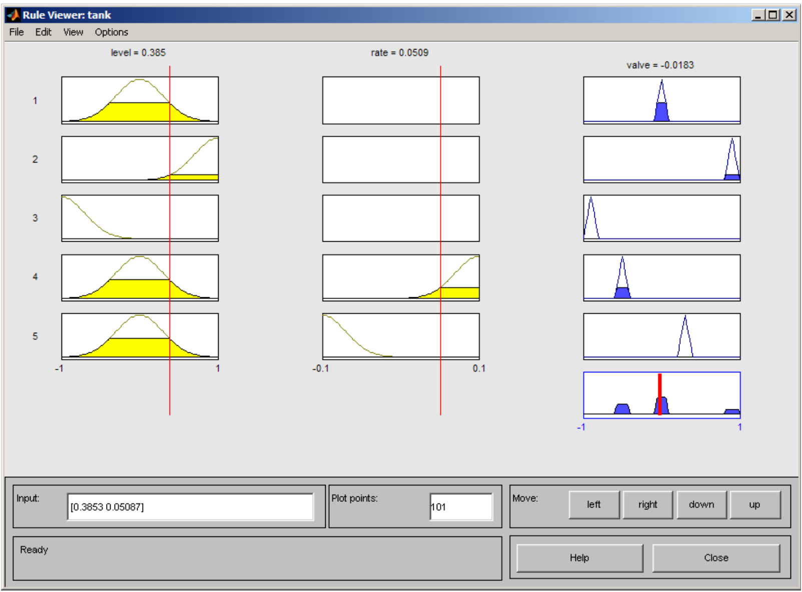
έχουμε το γράφημα



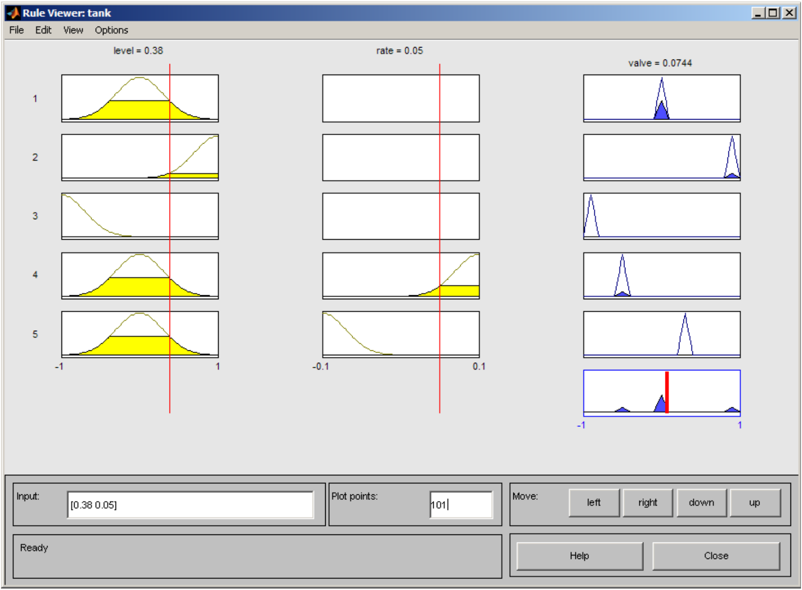
Παρατηρούμε ότι τώρα οι αντιδράσεις του ελεγκτή είναι σαφέστατα καλύτερες. Το παρακάτω γράφημα απεικονίζει την δράση ελέγχου σε σχέση με τις δύο μεταβλητές εισόδου.



Ο μηχανισμός συμπερασμού που επιλέγεται είναι αυτός του Mamdani, όπου όπως είπαμε και πριν ο βαθμός εκπλήρωσης του κάθε κανόνα είναι το ελάχιστο $\alpha_i = \mu_{A_1^i}(x_1) \wedge \mu_{A_2^i}(x_2)$ και το ασαφές σύνολο που παράγεται σαν έξοδος είναι το $\mu_C(y) = (\alpha_1 \wedge \mu_{B^1}(y)) \vee (\alpha_2 \wedge \mu_{B^2}(y)) \vee \ldots (\alpha_5 \wedge \mu_{B^5}(y))$. Διαλέγοντας αποασαφοποιητή κέντρου βάρους παράγεται η δράση ελέγχου.



Το αντίστοιχο σχήμα με μηχανισμό συμπερασμού Larsen είναι το ακόλουθο.



2.9 Ανάλυση κανόνων

Η σχεδίαση ενός ασαφούς ελεγκτή εντοπίζεται κυρίως στην εύρεση κατάλληλων κανόνων, έτσι ώστε το κλειστό σύστημα να ικανοποιεί κάποιες δεδομένες προϋποθέσεις. Δυστυχώς στην θεωρία των ασαφών ελεγκτών δεν υπάρχουν συγκεκριμένες διαδικασίες έτσι ώστε να σχεδιαστεί ένας τέτοιος ελεγκτής, σε αντίθεση με την γραμμική θεωρία αυτομάτου ελέγχου όπου υπάρχουν τεχνικές όπως ο γεωμετρικός τόπος ριζών, τα διαγράμματα Nyquist κλπ. Το πρόβλημα είναι ότι η σχέση εισόδου εξόδου του ελεγκτή είναι μη γραμμική και πολύ δύσκολη να περιγραφεί μαθηματικά.

Παρόλα αυτά δημιουργήθηκαν κάποια test με σκοπό να δείχνουν αν μια βάση κανόνων πληροί κάποια βασικά κριτήρια, όπως αν είναι πλήρης κλπ. Τα βασικά κριτήρια για την ανάλυση των κανόνων είναι τα ακόλουθα.

Πληρότητα - Είναι αρκετοί οι κανόνες που δημιουργήθηκαν;

Συνέπεια - Μήπως οι κανόνες αλληλοσυγκρούονται;

Πλεονασμός - Μήπως υπάρχουν στη βάση κανόνων κάποιοι περιττοί κανόνες;

Αλληλεπίδραση - Υπάρχουν κάποιοι κανόνες που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους;

Τα παραπάνω κριτήρια φαίνονται απολύτως λογικά. Στις επόμενες σελίδες θα προσπαθήσουμε να τα ορίσουμε μαθηματικά. Θα επικεντρωθούμε σε διακριτούς ασαφείς ελεγκτές, αξίζει όμως να σημειωθεί ότι τα κριτήρια γενικεύονται και σε συνεχείς ελεγκτές.

2.9.1 Πληρότητα

Σε μια πλήρης βάση κανόνων οποιαδήποτε τιμή εισόδου παράγει κάποιο μη μηδενικό ασαφές σύνολο σαν έξοδο. Μια βάση κανόνων είναι μη πλήρης αν υπάρχει κάποιος συνδυασμός τιμών των εισόδων ο οποίος παράγει πριν της αποασαφοποίησης μηδενικό ασαφές σύνολο, δηλαδή ένα ασαφές σύνολο όπου όλα τα στοιχεία του έχουν συμμετοχή 0. Κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί αν

Ένας ή περισσότεροι κανόνες λείπουν.

Οι ασαφείς συναρτήσεις συμμετοχής που ορίζονται στα ίδια σύνολα δεν επικαλύπτονται.

Ενώ η δεύτερη περίπτωση είναι εύκολο να ελεγχθεί, η πρώτη είναι αρκετά δύσκολη, ειδικά αν η βάση κανόνων είναι μεγάλη και πολύπλοκη.

Έστω ότι η βάση κανόνων είναι μη πλήρης και σαν αποασαφοποιητής έχει επιλεχθεί ο αποασαφοποιητής κέντρου βάρους. Τότε για συγκεκριμένους συνδυασμούς εισόδων το αποτέλεσμα θα είναι ένα μηδενικό ασαφές σύνολο $B^{'}$. Ο αποασαφοποιητής κέντρου βάρους για ένα ασαφές σύνολο θα έχει παρονομαστή το άθροισμα των συμμετοχών του $B^{'}$ δηλαδή το 0, και κατά συνέπεια το πρόγραμμα θα βγάλει λάθος "διαίρεση με το 0".

Για κάθε συνδυασμό εισόδων πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένας κανόνας με τιμή ενεργοποίησης $a > \varepsilon$ όπου $\varepsilon \in (0, 1)$.

Το ε επιλέγεται κάθε φορά ανάλογα με την εφαρμογή.

Ας ορίσουμε τώρα το σύνολο I των εισόδων στον ασαφή ελεγκτή. Αν ο ελεγκτής έχει n των αριθμό εισόδου τότε το I είναι το καρτεσιανό γινόμενο όλων των εισόδων, δηλαδή όλοι οι συνδυασμοί των εισόδων που παράγουν έναν $n-$διάστατο πίνακα.

Έστω ο ακόλουθος κανόνας

R_1 :ΑΝ e ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ ΚΑΙ ce ΘΕΤΙΚΟΣ ΤΟΤΕ u ΜΗΔΕΝΙΚΟΣ

όπου το ασαφές σύνολο "αρνητικός" είναι το $A = 1/-100 + 0.95/-50 + 0.05/0 + 0/50 + 0/100$, το "θετικός" το $B = 0/-100 + 0/-50 + 0.05/0 + 0.95/50 + 1/100$ και το "μηδενικός" το $C = 0/-100 + 0.61/-50 + 1/0 + 0.61/50 + 0/100$. Να ελεγχθεί η βάση κανόνων ως προς την πληρότητά της.

Ο χώρος των εισόδων δίνεται από όλους τους συνδυασμούς με τελεστή $\wedge$ των εισόδων e και ce. Σε μορφή πίνακα όπου οι στήλες αντιστοιχούν στο e και οι γραμμές στο ce είναι ο ακόλουθος

$$I_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0.05 & 0.95 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0.05 & 0.95 & 0.95 \\ \hline 0 & 0 & 0.05 & 0.05 & 0.05 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Για να είναι η βάση κανόνων πλήρης πρέπει όλα τα στοιχεία του πίνακα I_1 να είναι μεγαλύτερα του ε, κάτι που προφανώς σε αυτή την περίπτωση δεν συμβαίνει.

Αν στο παραπάνω παράδειγμα υπήρχαν n το πλήθος κανόνες τότε θα είχαμε n το πλήθος πίνακες $I_1, ..., I_n$. Το επόμενο βήμα θα ήταν να υπολογίσουμε το $(\vee I_i)$ και να ελέγξουμε ότι τα στοιχεία του πίνακα που προκύπτει είναι όλα μεγαλύτερα του ε.

2.9.2 Συνέπεια

Αν το ασαφές σύνολο που προκύπτει πριν την αποασαφοποίηση έχει πολλές κορυφές τότε η βάση κανόνων είναι ασυνεπής. Αυτό σημαίνει ότι οι κανόνες δείχνουν σε διαφορετικές "πλευρές" του σήματος εξόδου ταυτόχρονα. Τέτοιες αντιφάσεις συμβαίνουν στον έλεγχο γιατί μερικές φορές οι περιορισμοί στην σχεδίαση είναι οι ίδιοι αντιφατικοί. Ένα θετικό σημείο του ασαφούς ελέγχου είναι ότι μπορεί να αντιμετωπίσει επιτυχώς τέτοιες καταστάσεις, αλλά γενικά είναι επιθυμητό αν υπάρχει τέτοια ασυνέπεια στους κανόνες είναι καλό να ανακαλύπτεται.

Δύο κανόνες θα λέμε ότι είναι σε αντίφαση αν οι αριστερές τους πλευρές μοιάζουν και ταυτόχρονα οι δεξιές τους πλευρές διαφέρουν. Ή ισοδύναμα δυο κανόνες είναι συνεπείς μεταξύ τους αν μια μικρή διαφορά ανάμεσα στα δεξιά μέρη των κανόνων υποδηλώνει μικρή διαφορά μεταξύ των αριστερών τους πλευρών. Ένα μέτρο για την συνέπεια δύο κανόνων R_i και R_j είναι το ακόλουθο

$$m_{ij} = (I_i \text{ similar\_to } I_j) \text{ AND NOT}(U_i \text{ similar\_to } U_j).$$

Δύο κανόνες είναι ασυνεπείς μεταξύ τους αν το m_{ij} είναι σχετικά μεγάλο. Ένα απλό μέτρο ομοιότητας είναι το

$$1 - \frac{\sum |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|}{n}.$$

Έστω η ακόλουθη βάση κανόνων
R_1 : ΑΝ e ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ ΤΟΤΕ u ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ
R_2 : ΑΝ e ΜΗΔΕΝΙΚΟΣ ΤΟΤΕ u ΜΗΔΕΝΙΚΟΣ
R_3 : ΑΝ e ΠΟΛΥ ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ ΤΟΤΕ u ΘΕΤΙΚΟΣ
όπου τα ασαφή σύνολα έχουν οριστεί στο προηγούμενο παράδειγμα. Να ελεγχθεί αν η βάση κανόνων είναι συνεπής.

Προφανώς περιμένουμε ο πρώτος με τον τρίτο κανόνα να έρχονται σε αντίφαση. Ας υπολογίσουμε πρώτα το ασαφές σύνολο "ΠΟΛΥ ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ" το οποίο θα είναι το

$$D = 1/-100 + 0.9025/-50 + 0.0025/0 + 0/50 + 0/100.$$

Ας αρχίσουμε πρώτα με τους κανόνες R_1 και R_2. Υπολογίζουμε το κατά πόσο τα αριστερά μέρη των κανόνων μοιάζουν, δηλαδή αν το ασαφές σύνολο A "ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ" μοιάζει με το C "ΜΗΔΕΝΙΚΟΣ". Έχω

$$\begin{aligned} &A\ similar\_to\ C = \\ &= 1 - \tfrac{(|1-0|+|0.95-0.61|+|0.05-1|+|0-0.61|+|0-0|)}{5} = 0.42 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Ακριβώς το ίδιο κάνουμε και για τα δεξιά μέρη, που σε αυτή την περίπτωση είναι πάλι τα ίδια. Άρα έχω

$$m_{12} = 0.42 \text{ AND NOT}(0.42) = 0.42 \wedge \overline{0.42} = 0.42 \wedge 0.58 = 0.42.$$

Αν επαναλάβουμε την ίδια ακριβώς διαδικασία για όλους τους συνδυασμούς των κανόνων προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας.

0	0.42	0.78
0.42	0	0.42
0.78	0.42	0

Παρατηρούμε ότι η διαγώνιος είναι 0 μια και κανένας κανόνας δεν είναι ασυνεπής με τον εαυτό του. Επίσης ο πίνακας είναι συμμετρικός ως προς την διαγώνιό του καθώς $m_{ij} = m_{ji}$. Όντως παρατηρούμε ότι οι κανόνες 1 και 3 είναι σε αντίφαση καθώς $m_{13} = m_{31} = 0.78$. Παρατηρούμε ότι και ο 2ος κανόνας είναι κατά 0.42 ασυνεπής με τον τρίτο κάτι που όμως δεν θεωρείται ανησυχητικό.

Το κατά πόσο πετυχημένο είναι ένα μέτρο της ασυνέπειας μεταξύ δύο κανόνων εξαρτάται από τον τελεστή ομοιότητας δύο ασαφών συνόλων που χρησιμοποιούμε (similar_to). Στην βιβλιογραφία υπάρχουν και άλλοι τελεστές ομοιότητας που δίνουν καλύτερα αποτελέσματα από τον 2.22.

2.9.3 Πλεονασμός

Ένας κανόνας θα λέμε ότι είναι πλεονάζων αν η πληροφορία που περιέχει συμπεριλαμβάνεται στους άλλους κανόνες της βάσης. Π.χ. πλεονασμός στη βάση των κανόνων υπάρχει αν βάλεις τον ίδιο κανόνα δύο φορές, ή αν τα ασαφή σύνολα ενός κανόνα, είναι υποσύνολα των ασαφών συνόλων ενός άλλου κανόνα. Γενικά θέλουμε να μην υπάρχει πλεονασμός, πρώτα για λόγους οικονομίας μνήμης και υπολογιστικής ισχύς όσο και για λόγους συνοχής.

Αν R_i είναι οι πίνακες αλήθειας των κανόνων τότε ο i κανόνας είναι πλεονάζων αν και μόνο αν όλα τα στοιχεία του R_i είναι μικρότερα από αυτά του πίνακα που προκύπτει από την ένωση των πινάκων αλήθειας όλων των υπόλοιπων κανόνων.

Έστω οι ακόλουθοι κανόνες

R_1 : ΑΝ e ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ ΤΟΤΕ u ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ

R_2 : ΑΝ e ΜΗΔΕΝΙΚΟΣ ΤΟΤΕ u ΜΗΔΕΝΙΚΟΣ

R_3 : ΑΝ e ΠΟΛΥ ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ ΤΟΤΕ u ΠΟΛΥ ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ

Να ελεγχθεί αν ο τρίτος κανόνας είναι πλεονάζων.

Με πρώτη ματιά φαίνεται ότι όντως ο τρίτος κανόνας περιέχεται στο πρώτο. Υπολογίζουμε τους πίνακες αλήθειας των κανόνων με τελεστή αλήθειας τον min

$R_1 =$

1	0.95	0.05	0	0
0.95	0.95	0.05	0	0
0.05	0.05	0.05	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

$R_2 =$

0	0	0	0	0
0	0.61	0.61	0.61	0
0	0.61	1	0.61	0
0	0.61	0.61	0.61	0
0	0	0	0	0

και

$R_3 =$

1	0.9025	0.0025	0	0
0.9025	0.9025	0.0025	0	0
0.0025	0.0025	0.0025	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Δημιουργούμε τον πίνακα αλήθειας της βάσης κανόνων χωρίς των κανόνα R_3 με τον τελεστή OR (max) δηλαδή τον

$R_1 \vee R_2 =$

1	0.95	0.05	0	0
0.95	0.95	0.61	0.61	0
0.05	0.61	1	0.61	0
0	0.61	0.61	0.61	0
0	0	0	0	0

Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του R_3 είναι μικρότερο ή ίσο από τα αντίστοιχα του $R_1 \vee R_2$ και άρα συμπεραίνουμε ότι ο τρίτος κανόνας είναι πλεονάζων (άχρηστος).

Για να ελέγξουμε για το αν υπάρχει κάποιος κανόνας στη βάση ο οποίος είναι πλεονάζων θα πρέπει να κάνουμε την παραπάνω διαδικασία για όλους τους συνδυασμούς των κανόνων.

2.9.4 Αλληλεπίδραση

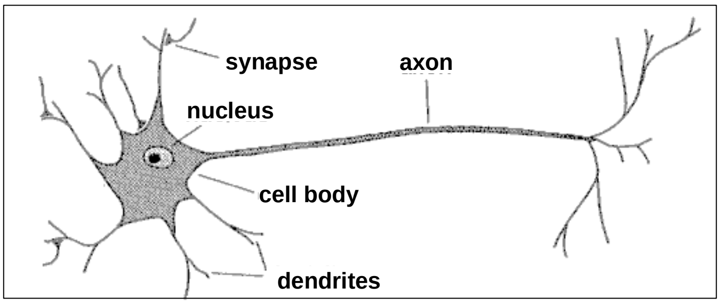
Η ουσία της αλληλεπίδρασης είναι όταν ο βαθμός ενεργοποίησης ενός κανόνα είναι 1 αλλά το ασαφές σύνολο που προκύπτει είναι διαφορετικό από αυτό της εξόδου του κανόνα εξαιτίας της επίδρασης των άλλων κανόνων στο αποτέλεσμα. Η αλληλεπίδραση όπως αυτή ορίστηκε πιο πάνω, συμβαίνει εξαιτίας της επικάλυψης των ασαφών συνόλων στην αριστερή πλευρά των κανόνων. Αν όλα τα ασαφή σύνολα είναι ξένα μεταξύ τους τότε δεν υπάρχει καθόλου αλληλεπίδραση μεταξύ των κανόνων.

Κεφάλαιο 3

Νευρωνικός έλεγχος

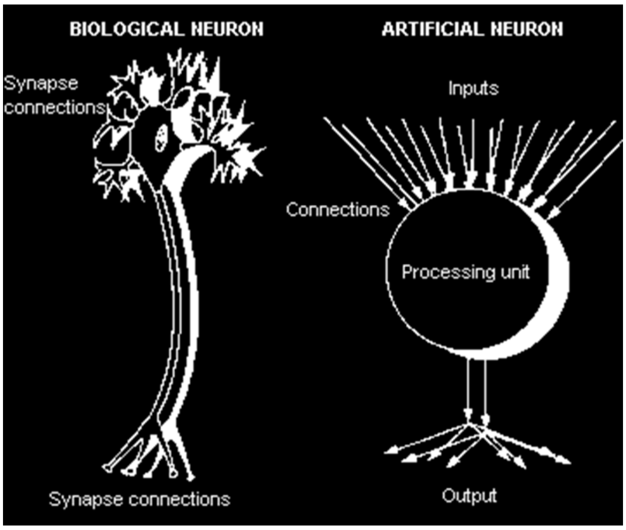
3.1 Νευρωνικά δίκτυα

Η μελέτη υπολογιστικών συστημάτων που βασίζονται σε πρότυπα του ανθρώπινου εγκεφάλου έκανε τα πρώτα της βήματα το 1943 από τους McCulloch και Pitts οι οποίοι σχεδίασαν το πρώτο νευρωνικό δίκτυο. Η πολυπλοκότητα του ανθρώπινου εγκεφάλου είναι τέτοια έτσι ώστε απαγορεύει την πλήρη κατανόησή του. Ακόμα και η κατανόηση της λειτουργίας ενός νευρώνα του ανθρώπινου εγκεφάλου είναι φοβερά πολύπλοκη. Ο ανθρώπινος εγκέφαλος αποτελείται από 10^{10} νευρώνες, με κάθε νευρώνα να έχει αρκετές χιλιάδες συνδέσεις. Βασικά χαρακτηριστικά του ανθρώπινου εγκεφάλου είναι η αναγνώριση προτύπων (pattern recognition), ο συνειρμός, η πολυπλοκότητα και η ανεκτικότητα στο θόρυβο.



Νευρώνας

Ένας νευρώνας ενεργοποιείται όταν το σήμα εισόδου του γίνεται μεγαλύτερο από μία τιμή. Οι συνάψεις (συνδέσεις νευρώνων) μπορεί να είναι είτε διεγερτικές είτε ανασταλτικές. Ο νευρώνας έχει ένα κυτταρικό σώμα, μια δενδρική δομή εισόδων τους δενδρίτες και δενδρική δομή εξόδων τους άξονες. Οι άξονες συνδέονται με δενδρίτες άλλων νευρώνων μέσω των συνάψεων. Τα ηλεκτροχημικά σήματα εισόδων διαδίδονται από τους δενδρίτες στο κυτταρικό σώμα και έπειτα μέσω των αξόνων σε άλλους νευρώνες. Αντίστοιχες δομές ακολουθούνται και στα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα.



Βιολογικός και τεχνητός νευρώνας

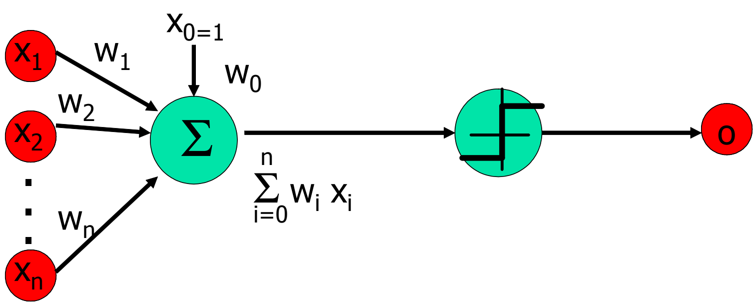
3.1.1 Εκπαίδευση

Έστω ένας νευρώνας με n εισόδους $x_1, ..., x_n$ όπου κάθε σύναψη έχει και ένα (συναπτικό) βάρος $w_1, ..., w_n$. Η είσοδος x_0 είναι πάντα 1 και το αντίστοιχο συναπτικό βάρος w_0 είναι το επίπεδο ενεργοποίησης του νευρώνα ή αλλιώς το επίπεδο κατωφλίου (threshold). Με O συμβολίζουμε την έξοδο του νευρώνα. Συνήθως για ευκολία στο συμβολισμό με w συμβολίζουμε το διάνυσμα $\begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{bmatrix}$ και με x το $\begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}$. Ένας πολύ συνηθισμένος τρόπος υπολογισμού της εξόδου είναι η γραμμική συνάρτηση κατωφλίου

$$O(w,x) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=0}^{n} w_i x_i > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επίσης υπάρχει και η συνάρτηση προσήμου όπου

$$O(w,x) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=0}^{n} w_i x_i \geq 0 \\ -1, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



Νευρώνας.

Παρατηρούμε ότι ο νευρώνας ενεργοποιείται θετικά αν $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i > -w_0$ για αυτό και το $w_0 = \theta$ ονομάζεται **επίπεδο ενεργοποίησης**. Αν $\theta = 0$ τότε η είσοδος x_0 παραλείπεται.

Το πρόβλημα εκπαίδευσης ενός νευρώνα είναι να βρεθούν κατάλληλα συναπτικά βάρη έτσι ώστε για συγκεκριμένες εισόδους το νευρωνικό δίκτυο να παράγει συγκεκριμένες επιθυμητές εξόδους.

Έστω το ακόλουθο σύνολο εισόδων εξόδων

	x_1	x_2	y
1.	1	1	1
2.	1	0	0
3.	0	1	0
4.	0	0	0

και ένας νευρώνας με δύο εισόδους και μια έξοδο η οποία υπολογίζεται μέσω της γραμμικής συνάρτησης κατωφλίου. Αναζητούμε τα βάρη $w_1, w_2,$ και το επίπεδο ενεργοποίησης $w_0 = \theta$. Πράγματι για το πρώτο ζεύγος εισόδων εξόδων έχουμε

$$O(w, \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}) = 1 \Leftrightarrow w_0 + w_1 + w_2 > 0.$$

Αντίστοιχα για τα επόμενα τρία ζευγάρια έχουμε

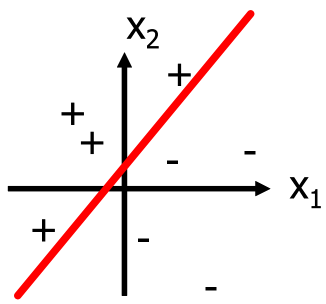
$$\begin{aligned} O(w, \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}) &= 0 \Leftrightarrow w_0 + w_1 \leq 0 \\ O(w, \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}) &= 0 \Leftrightarrow w_0 + w_2 \leq 0 \\ O(w, \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}) &= 0 \Leftrightarrow w_0 \leq 0 \end{aligned}$$

Συναληθεύοντας τις παρακάτω ανισώσεις μπορούμε να διαλέξουμε μια λύση πχ την

$$\begin{aligned} w_1 &= w_2 = \frac{1}{2} \\ \theta &= w_0 = -0.6 \end{aligned}$$

Και όντως με αυτές τις τιμές ο νευρώνας παράγει τις επιθυμητές εξόδους. Έτσι τελειώνει επιτυχώς η διαδικασία της εκπαίδευσης.
Ο παραπάνω νευρώνας προφανώς παράγει να εξόδους και για άλλες εισόδους, πχ για $x_1 = 0.4$ και $x_2 = -1$ η έξοδός του είναι $O = 0$ γιατί $\frac{1}{2}0.4 + \frac{1}{2}(-1) - 0.6 = -0.9 \leq 0$.

Με το προηγούμενο παράδειγμα καταφέραμε να εκπαιδεύσουμε ένα νευρώνα έτσι ώστε να παράγει την επιθυμητή έξοδο για συγκεκριμένες εισόδους. Η παραπάνω δομή νευρώνα μπορεί να λύσει προβλήματα που είναι γραμμικώς διαχωρίσιμα, δηλαδή όταν υπάρχει ευθεία γραμμή τέτοια ώστε να διαχωρίζει τις εισόδους που παράγουν έξοδο 1 από αυτές που παράγουν έξοδο 0.



Γραμμικώς διαχωρίσιμο πρόβλημα εκπαίδευσης.

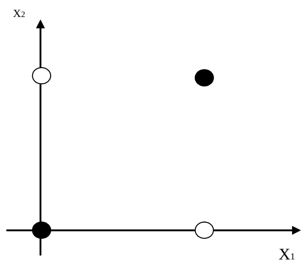
Έστω το ακόλουθο σύνολο εισόδων εξόδων

	x_1	x_2	y
1.	1	1	0
2.	1	0	1
3.	0	1	1
4.	0	0	1

ένας νευρώνας με δύο εισόδους και μια έξοδο η οποία υπολογίζεται μέσω της γραμμικής συνάρτησης κατωφλίου. Τα παραπάνω ζευγάρια είναι πρακτικά η έξοδος της συνάρτησης XOR. Αν προσπαθήσουμε να εκπαιδεύσουμε τον νευρώνα καταλήγουμε στις εξής ανισώσεις

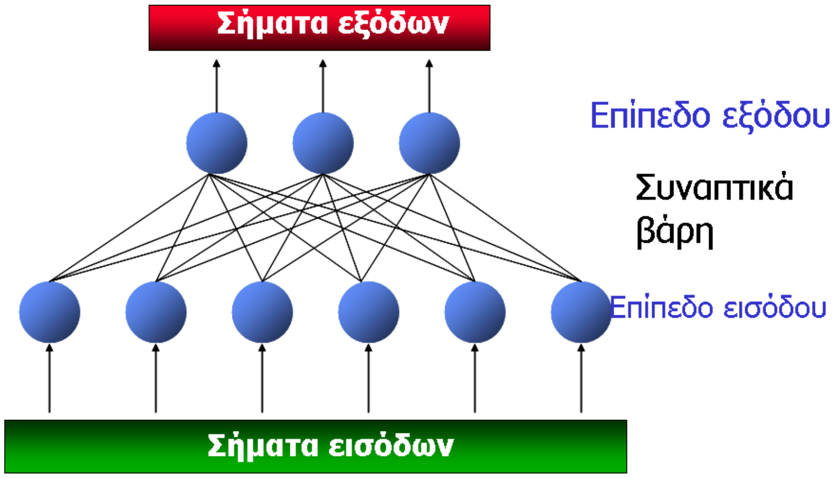
$$\begin{aligned} w_0 + w_1 + w_2 &\leq 0 \\ w_0 + w_1 &> 0 \\ w_0 + w_2 &> 0 \\ w_0 &\leq 0 \end{aligned}$$

οι οποίες δεν έχουν λύση. Αυτό συμβαίνει γιατί το πρόβλημα δεν είναι γραμμικώς διαχωρίσιμο.



Μη γραμμικώς διαχωρίσιμο πρόβλημα εκπαίδευσης.

Εκτός από νευρωνικά δίκτυα με ένα νευρώνα υπάρχουν και τα αντίστοιχα πολυεπίπεδα.



Πολυεπίπεδο νευρωνικό δίκτυο.

Ας συνεχίσουμε με κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 3.1 *Μια εποχή εκπαίδευσης ονομάζεται η διαδικασία εισαγωγής όλων των ζευγαριών εισόδων εξόδων στο νευρωνικό δίκτυο μία φορά.*

Στο παράδειγμα μια εποχή αντιστοιχούσε στην εισαγωγή των τεσσάρων ζευγαριών εισόδων εξόδων.

Θα δούμε τώρα τον αλγόριθμο εκπαίδευσης νευρώνα **Perceptron**. Έστω K ζευγάρια εκπαίδευσης (x^i, y^i) όπου $x^i = \begin{bmatrix} x_1^i & ... & x_n^i \end{bmatrix}$ και $y^i = \begin{bmatrix} x_1^i & ... & x_m^i \end{bmatrix}$ για $i = 1, ..., K$.

- Επιλέγουμε $\eta > 0$.
- Ορίζουμε τα βάρη $w = \begin{bmatrix} w_1 & ... & w_n \end{bmatrix}$ σε κάποιες αυθαίρετες μικρές συνήθως τιμές. Θέτουμε $E = 0$ και ένα μετρητή $k = 1$.
- Το k-οστό ζεύγος εισόδων εξόδων εισάγεται στο νευρωνικό δίκτυο. Θέτουμε για ευκολία στους συμβολισμούς $x = x^k$ και $y = y^k$. Υπολογίζω την έξοδο $O(w, x)$ με βάση την συνάρτηση εξόδου.
- Ενημερώνουμε τις τιμές των συναπτικών βαρών με βάση τον ακόλουθο τύπο
$$w = w + \eta(y_i - O_i)x, i = 1, ..., m$$
- Το σφάλμα ενημερώνεται με βάση τον τύπο
$$E = E + \frac{1}{2}\left\| y - O \right\|^2$$
- Αν $k < K$ τότε θέτω $k = k + 1$ και συνεχίζω από το βήμα 3.
- Μια εποχή ολοκληρώθηκε. Αν $E = 0$ τότε η εκπαίδευση ολοκληρώθηκε. Αλλιώς θέτω $E = 0$, $k = 1$ και συνεχίζω ξανά στο βήμα 3.

Προφανώς αν το πρόβλημα είναι γραμμικώς διαχωρίσιμο ο παραπάνω αλγόριθμος τελειώνει σε πεπερασμένο αριθμό εποχών.

Έστω το ακόλουθο σύνολο εισόδων εξόδων

$$\begin{aligned} x^1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, y^1 = -1 \\ x^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, y^1 = 1 \\ x^3 &= \begin{bmatrix} -1 & -0.5 & -1 \end{bmatrix}, y^1 = 1 \end{aligned}$$

ένας νευρώνας με τρεις εισόδους χωρίς επίπεδο ενεργοποίησης ($x_0 = 0$) και μια έξοδο η οποία υπολογίζεται μέσω της συνάρτησης προσήμου.

- Επιλέγουμε $\eta = 0.1$.
- Ορίζω αυθαίρετα $w_1 = 1$, $w_2 = -1$, $w_3 = 0$, $w = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ και $k = 1$.
- Εισάγω το πρώτο ζευγάρι εισόδων εξόδων. $x = x^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $y = y^1 = -1$. Η έξοδος του νευρώνα είναι

$$\begin{aligned} O &= sign(w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3) = \\ &= sign(1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = sign(1) = 1 \end{aligned}$$

- Ενημερώνουμε τις τιμές των συναπτικών βαρών

$$w = w + \eta(y - O)x = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix} + 0.1(-1-1)\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix}0.8 & -1 & -0.2\end{bmatrix}$$

- Ενημερώνουμε το σφάλμα

$$E = E + \frac{1}{2}\left\|-1-1\right\|^2 = 0 + 2 = 2$$

- $k < 3$ και άρα συνεχίζω ξανά στο βήμα 3 του αλγορίθμου θέτοντας $k = k+1 = 2$.
- $x = x^2 = \begin{bmatrix}0 & -1 & -1\end{bmatrix}$, $y = y^2 = 1$.

$$O = sign(w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3) = wx^T = \\ = sign\left(\begin{bmatrix}0.8 & -1 & -0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\\-1\end{bmatrix}\right) = sign(1.2) = 1.$$

-

$$w = \begin{bmatrix}0.8 & -1 & -0.2\end{bmatrix} + 0.1(1-1)\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.8 & -1 & -0.2\end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι σε αυτό το βήμα τα βάρη δεν άλλαξαν μια και ο νευρώνας είχε σαν έξοδο την επιθυμητή έξοδο.

- $E = 2 + \frac{1}{2}\left\|1-1\right\|^2 = 2$
- $k < 3$ και άρα συνεχίζω ξανά στο βήμα 3 του αλγορίθμου θέτοντας $k = k+1 = 3$.
- $x = x^3 = \begin{bmatrix}-1 & -0.5 & -1\end{bmatrix}$, $y = y^1 = 1$

$$O = sign\left(\begin{bmatrix}0.8 & -1 & -0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-0.5\\-1\end{bmatrix}\right) = sign(-0.1) = -1.$$

- $w = \begin{bmatrix}0.8 & -1 & -0.2\end{bmatrix} + 0.1(1-(-1))\begin{bmatrix}-1 & -0.5 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.6 & -1.1 & -0.4\end{bmatrix}$.
- $E = 2 + \frac{1}{2}\left\|1-(-1)\right\|^2 = 2 + 2 = 4$
- $k = 3 = K$ και άρα συνεχίζω στο βήμα 7.
- $E = 4 \neq 0$. Άρα θέτω $E = 0$, $k = 1$ και συνεχίζω ξανά στο βήμα 3.
- $x = x^1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $y = y^1 = -1$.

$$O = sign\left(\begin{bmatrix}0.6 & -1.1 & -0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) sign(0.2) = 1.$$

- $w = \begin{bmatrix}0.6 & -1.1 & -0.4\end{bmatrix} + 0.1(-1-1)\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.4 & -1.1 & -0.6\end{bmatrix}$
- $E = 0 + \frac{1}{2}\left\|-1-1\right\|^2 = 2.$

- $k < 3$ και άρα συνεχίζω ξανά στο βήμα 3 του αλγορίθμου θέτοντας $k = k+1 = 2$.
- $x = x^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $y = y^2 = 1$.

$$O = sign\left(\begin{bmatrix} 0.4 & -1.1 & -0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = sign(1.7) = 1.$$

- Τα βάρη δεν χρειάζονται διόρθωση μια και $O = y$.
- $E = 2 + 0 = 2$.
- $k < 3$ και άρα συνεχίζω ξανά στο βήμα 3 του αλγορίθμου θέτοντας $k = k+1 = 3$.
- $x = x^3 = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 & -1 \end{bmatrix}$, $y = y^1 = 1$.

$$O = sign\left(\begin{bmatrix} 0.4 & -1.1 & -0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -0.5 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = sign(0.75) = 1.$$

- Τα βάρη δεν χρειάζονται διόρθωση μια και $O = y$.
- $E = 2 + 0 = 2$.
- $k = 3 = K$ και άρα συνεχίζω στο βήμα 7.
- $E = 2 \neq 0$. Άρα θέτω $E = 0$, $k = 1$ και συνεχίζω ξανά στο βήμα 3.
- Συνεχίζοντας στην τρίτη εποχή παρατηρώ ότι το νευρωνικό παράγει σωστά αποτελέσματα για όλα τα ζευγάρια εισόδων εξόδων, άρα έχω $E = 0$ και έτσι τελειώνει η εκπαίδευση του νευρώνα.

Έτσι ο νευρώνας έχει συναπτικά βάρη $\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & -1.1 & -0.6 \end{bmatrix}$. Ας δούμε τώρα τι έξοδο παράγει ο συγκεκριμένος νευρώνας που εκπαιδεύσαμε για άλλες εισόδους εκτός του συνόλου εκπαίδευσης. Διαλέγουμε πχ το $x = \begin{bmatrix} -1 & -1.1 & 1 \end{bmatrix}$. Τότε η έξοδος του νευρώνα είναι

$$O = sign\left(\begin{bmatrix} 0.4 & -1.1 & -0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1.1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = sign(0.21) = 1.$$

Βιβλιογραφία

[1] Κινγκ, Ροβέρτος-Ε, *Ευφυής Έλεγχος*, Εκδόσεις Τζιόλα, 2004.

[2] Fuller, Robert, *Lectures on NeuroFuzzy Control*, http://www.abo.fi/~rfuller/robert.html, Department of Operations Research, Eötvös Loránd University.

[3] Jantzen, Jan, *Fuzzy Control, Lecture Notes in Online Process Control* (5354), Publ no 9109, Oct 1991, Electric Power Engineering Dpt, Technical University of Denmark.

[4] Τζιώνας, Παναγιώτης, *Εισαγωγή στον Ευφυή Έλεγχο*, Διδακτικές σημειώσεις, Τμήμα Μαθηματικών, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

[5] Tsoukalas, Lefteri and Uhrig, Robert, *Fuzzy and Neural Approaches in Engineering*, John Wiley and Sons Inc., 1997.

Ευρετήριο

Άδεια χρήσης

δότησης ή αναπαραγωγών του αντικείμενου της αδειοδότησης ή τροποποιήσεών του, με οποιονδήποτε τρόπο, με πώληση ή οποιαδήποτε άλλη δικαιοπραξία διάθεσης δικαιωμάτων επ' αυτού.

δ.«Χορηγών την Άδεια» σημαίνει το ένα ή περισσότερα φυσικά, ή νομικά πρόσωπα τα οποία προσφέρουν το αντικείμενο της αδειοδότησης υπό τους όρους της παρούσας Άδειας.

ε.«Πρώτος Δημιουργός (Αρχικός Δικαιούχος)» σημαίνει, στην περίπτωση του συγγραφικού ή καλλιτεχνικού έργου, το ένα ή περισσότερα φυσικά, ή νομικά πρόσωπα—στην περίπτωση που το νομικό πρόσωπο έχει καταστεί δημιουργός κατά πλάσμα δικαίου—τα οποία δημιούργησαν το αντικείμενο της αδειοδότησης, ή στην περίπτωση που υφίσταται ανωνυμία ή ψευδωνυμία στη δημιουργία του αντικείμενου της αδειοδότησης, το πρόσωπο που σύμφωνα με το νόμο παρουσιάζει το αντικείμενο της αδειοδότησης στο κοινό.

στ.«Δικαιούχος Συγγενικών Δικαιωμάτων» σημαίνει (i) ο ηθοποιός, μουσικός, τραγουδιστής, χορωδός, χορευτής, καλλιτέχνης κουκλοθέατρου, καλλιτέχνης θεάτρου σκιών, καλλιτέχνης βαριεττέ, καλλιτέχνης τσίρκου, και οποιοσδήποτε άλλος καλλιτέχνης που στην περίπτωση καλλιτεχνικής παράστασης υποκρίνεται, τραγουδάει, αποδίδει, απαγγέλλει, υποδύεται, μεταφράζει ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο συμμετέχει σε παράσταση φιλολογικών ή καλλιτεχνικών έργων ή εκφράσεων της λαϊκής παράδοσης, (ii) στην περίπτωση εγγραφής ήχου (φωνογράφημα), ο παραγωγός, είτε φυσικό είτε νομικό πρόσωπο, με πρωτοβουλία και ευθύνη του οποίου ενεργείται η πρώτη ηχογράφηση, (iii) στην περίπτωση εγγραφής εικόνας ή εικόνας και ήχου (οπτικοακουστικό έργο) ο παραγωγός, είτε φυσικό είτε νομικό πρόσωπο, με πρωτοβουλία και ευθύνη του οποίου ενεργείται η πρώτη εγγραφή εικόνας με ή χωρίς ήχο, (iv) στην περίπτωση της αναμετάδοσης, το νομικό πρόσωπο που αναμεταδίδει.

ζ.«Αντικείμενο της αδειοδότησης» σημαίνει το πρωτότυπο πνευματικό συγγραφικό, καλλιτεχνικό ή επιστημονικό έργο, σε οποιαδήποτε μορφή ή υλικό φορέα και αν αποτυπωθεί, στις οποίες συμπεριλαμβάνονται και τα μέσα ψηφιακής αποτύπωσης, σύμφωνα με τους ορισμούς του Ελληνικού νόμου περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Για την εφαρμογή της Άδειας αυτής, το αντικείμενο της αδειοδότησης, ενδεικτικά και όχι περιοριστικά περιλαμβάνει κάθε καλλιτεχνική παράσταση, ηχητική εγγραφή (φωνογράφημα), εγγραφή εικόνας και ήχου (οπτικοακουστικό έργο), αναμετάδοση, ή βάση δεδομένων, σύμφωνα με τους ορισμούς του Ελληνικού νόμου περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Ο ορισμός «Αντικείμενο της αδειοδότησης» λαμβάνεται υπόψη στο βαθμό που η καλλιτεχνική παράσταση, ηχητική εγγραφή (φωνογράφημα), εγγραφή εικόνας και ήχου (οπτικοακουστικό έργο), αναμετάδοση, ή βάση δεδομένων προστατεύεται από το νόμο στη χώρα της δικαιοδοσίας Σας.

η.«Εσείς» σημαίνει το φυσικό ή νομικό πρόσωπο το οποίο ασκεί δικαιώματα βάσει της Άδειας αυτής, το οποίο δεν έχει προηγουμένως παραβιάσει τους όρους της παρούσας Άδειας σχετικά με το αντικείμενο της αδειοδότησης ή το οποίο ασκεί τα δικαιώματα βάσει της Άδειας αυτής με τη συναίνεση του δικαιούχου.

θ.«Παρουσίαση στο κοινό» σημαίνει η παρουσίαση του αντικείμενου της αδειοδότησης σε κύκλο ευρύτερο από το στενό κύκλο της οικογένειας και του άμεσου κοινωνικού περιβάλλοντος, που γίνεται με οποιονδήποτε τρόπο ή διαδικασία με χρήση ασύρματων ή ενσύρματων υλικών φορέων ή ψηφιακών μέσων και με τρόπο που καθένας από το κοινό μπορεί με ίδια μέσα να έχει πρόσβαση στο αντικείμενο της αδειοδότησης από τον τόπο που επιλέγει.

ι.«Αναπαραγωγή» σημαίνει η παραγωγή αντιγράφων, προσωρινών ή οριστικών, του αντικείμενου της αδειοδότησης με οποιονδήποτε τρόπο συμπεριλαμβανομένων των ηχητικών ή τηλεοπτικών εγγραφών και των εγγραφών του αντικείμενου της αδειοδότησης με σκοπό την παραγωγή ή/και αναπαραγωγή του επί ψηφιακών ή άλλων ηλεκτρονικών υλικών φορέων για τη διατήρησή του.

2. Νόμιμοι περιορισμοί (Exceptions)

Η Άδεια αυτή δεν θίγει με οποιονδήποτε τρόπο τους νόμιμους περιορισμούς του περιουσιακού δικαιώματος και το ηθικό δικαίωμα του δημιουργού βάσει του νόμου για την προστασία της πνευματικής ιδιοκτησίας ή άλλων νόμων.

3. Παροχή Άδειας.

Βάσει των όρων και προϋποθέσεων της Άδειας αυτής, ο Χορηγών την Άδεια με το παρόν ιδιωτικό συμφωνητικό Σας παρέχει μια παγκόσμια, χωρίς πληρωμή (πνευματικών ή συγγενικών) δικαιωμάτων, μη αποκλειστική, διαρκή άδεια να ασκείτε τα δικαιώματα στο αντικείμενο της αδειοδότησης όπως προσδιορίζεται παρακάτω:

α.Να αναπαράγετε το αντικείμενο της αδειοδότησης, να ενσωματώνετε το αντικείμενο της αδειοδότησης σε ένα ή περισσότερα Συλλογικά Έργα και να αναπαράγετε το αντικείμενο της αδειοδότησης που έχει ενσωματωθεί σε Συλλογικά Έργα.

β.Να διανέμετε αντίγραφα και παρουσιάζετε στο κοινό το αντικείμενο της αδειοδότησης, συμπεριλαμβανομένων και των υλικών ενσωματώσεων σε Συλλογικά Έργα.

γ.Να κάνετε οποιαδήποτε χρήση ουσιώδους μέρους των περιεχομένων βάσης δεδομένων, στην περίπτωση που το αντικείμενο της αδειοδότησης είναι βάση δεδομένων.

Τα ανωτέρω δικαιώματα μπορούν να ασκηθούν με όλα τα τεχνικά μέσα και σε όλους τους υλικούς φορείς ενσωμάτωσης αντικείμενου της αδειοδότησης. Τα ανωτέρω δικαιώματα περιλαμβάνουν το δικαίωμα να γίνονται αυτές οι μετατροπές οι οποίες είναι τεχνικά αναγκαίες για την άσκηση των δικαιωμάτων σε άλλα τεχνικά μέσα και υλικούς φορείς ενσωμάτωσης αντικείμενου της αδειοδότησης. Υπάρχει επιφύλαξη υπέρ του δικαιούχου για όλα τα δικαιώματα που δεν παρέχονται σαφώς από τον Χορηγούντα την Άδεια, όπως ενδεικτικά και όχι περιοριστικά αναφέρονται τα δικαιώματα της Ρήτρας 4(ε) και 4(στ).

Στην περίπτωση που ο Χορηγών την Άδεια είναι δικαιούχος του δικαιώματος ειδικής φύσης (sui generis) του κατασκευαστή βάσης δεδομένων σύμφωνα με τον Ελληνικό νόμο περί πνευματικής ιδιοκτησίας, όπως αυτό ισχύει κατ' εφαρμογή στο Ελληνικό Δίκαιο της Οδηγίας 96/9/ΕΟΚ για τη νομική προστασία των βάσεων δεδομένων, ο Χορηγών την Άδεια παραιτείται αυτού του δικαιώματός του.

4. Περιορισμοί

Η παρεχόμενη άδεια βάσει της Ρήτρας 3 όπως προσδιορίζεται παραπάνω υπόκειται στους εξής περιορισμούς:

α.Μπορείτε να προβείτε σε διανομή, ή δημόσια εκτέλεση του αντικείμενου της αδειοδότησης μόνον βάσει των όρων της παρούσας Άδειας. Είστε υποχρεωμένοι να περιλάβετε ένα αντίγραφο αυτής της Άδειας ή το Κανονιστικό Αναγνωριστικό Πόρου (Uniform Resource Identifier) της Άδειας αυτής σε κάθε αντίγραφο του αντικείμενου της αδειοδότησης το οποίο διανέμετε, ή εκτελείτε δημοσίως. Δεν μπορείτε να επιβάλλετε όρους στο αντικείμενο της αδειοδότησης οι οποίοι περιορίζουν τους όρους της Άδειας ή την άσκηση από τον λήπτη του αντικείμενου της αδειοδότησης των δικαιωμάτων που παρέχονται σ' αυτόν υπό τους όρους της παρούσας Άδειας. Δεν μπορείτε να χορηγήσετε άδεια περαιτέρω εκμετάλλευσης του αντικείμενου της αδειοδότησης. Πρέπει να τηρείτε άθικτες όλες τις γνωστοποιήσεις που αφορούν την Άδεια αυτή και τους περιορισμούς της ευθύνης σε κάθε αντίγραφο του αντικείμενου της αδειοδότησης που διανέμετε ή παρουσιάζετε δημόσια. Σε κάθε διανομή ή δημόσια παρουσίαση του αντικείμενου της αδειοδότησης, δεν επιτρέπετε να κάνετε χρήση οποιουδήποτε τεχνολογικού μέτρου επί του αντικείμενου της αδειοδότησης που έχει ως αποτέλεσμα τον περιορισμό της άσκησης από τον λήπτη του αντικείμενου της αδειοδότησης των δικαιωμάτων που παρέχονται σ' αυτόν υπό τους όρους της παρούσας Άδειας. Η παρούσα Ρήτρα 4(α) ισχύει για το αντικείμενο της αδειοδότησης που είναι ενσωματωμένο σε Συλλογικό Έργο, αλλά δεν απαιτείται το Συλλογικό Έργο ξεχωριστά από το ίδιο το αντικείμενο της αδειοδότησης να υπόκειται στους όρους της παρούσας Άδειας. Αν δημιουργείτε Συλλογικό Έργο, εφόσον γίνει γνωστοποίηση από τον Χορηγούντα την Άδεια, πρέπει, στο βαθμό που αυτό είναι δυνατόν, να αφαιρέσετε από το

Συλλογικό Έργο κάθε αναφορά σε δικαιούχο όπως αυτό απαιτείται από τη Ρήτρα 4(δ).

β.Δεν μπορείτε να ασκείτε δικαιώματα παρεχόμενα σε Σας βάσει της προαναφερόμενης Ρήτρας 3 κατά τρόπο που αποσκοπεί κυρίως σε εμπορική εκμετάλλευση ή στοχεύει σε ιδιωτική χρηματική ανταμοιβή. Η ανταλλαγή του αντικείμενου της αδειοδότησης με άλλα έργα προστατευμένα σύμφωνα με το νόμο περί πνευματικής ιδιοκτησίας μέσω συστήματος ψηφιακού μοιράσματος/ανταλλαγής αρχείων ή άλλως δεν θα θεωρείται ότι αποσκοπεί ή οδηγεί σε εμπορικό πλεονέκτημα ή ιδιωτική χρηματική ανταμοιβή, υπό τον όρο ότι δεν υπάρχει πληρωμή χρηματικής αμοιβής σχετικά με την ανταλλαγή έργων προστατευμένων σύμφωνα με το νόμο περί πνευματικής ιδιοκτησίας.

γ.Αν διανείμετε, ή παρουσιάζετε στο κοινό το αντικείμενο της αδειοδότησης ή το Συλλογικό Έργο, πρέπει, εφόσον δεν έχει υποβληθεί αίτημα σχετικό με τη Ρήτρα 4(α), να κρατήσετε άθικτες όλες τις πληροφορίες για το δικαιούχο πνευματικής ιδιοκτησίας και να παρέχετε, ανάλογα με το μέσον ή τα μέσα που χρησιμοποιείτε: (1) το όνομα (ή το ψευδώνυμο) του Πρώτου Δημιουργού (Αρχικού Δικαιούχου) ή του Δικαιούχου Συγγενικών δικαιωμάτων αν υπάρχει και/ή (2) αν ο Πρώτος Δημιουργός (Αρχικός Δικαιούχος) ή ο Δικαιούχος Συγγενικών δικαιωμάτων και/ή ο Χορηγών την Άδεια ορίσει, στους όρους χρήσης ή σε άλλο σχετικό μέσο, άλλον ή άλλους (π.χ. ένα ινστιτούτο, εκδότη, περιοδικό) αναφορικά με τις πληροφορίες για τα δικαιώματα πνευματικής ιδιοκτησίας όσον αφορά τον Χορηγούντα την Άδεια, το όνομα αυτού ή αυτών («Δικαιούχοι»). Επίσης, τον τίτλο του αντικείμενου της αδειοδότησης αν υπάρχει, και (3) στο βαθμό που αυτό είναι δυνατό, το Κανονιστικό Αναγνωριστικό Πόρου (Uniform Resource Identifier), αν υπάρχει, το οποίο ο Χορηγών την Άδεια προσδιορίζει συνδεόμενο με το αντικείμενο της αδειοδότησης, εκτός αν αυτό το Κανονιστικό Αναγνώρισης Πόρου (Uniform Resource Identifier) δεν αναφέρεται στις πληροφορίες για την πνευματική ιδιοκτησία ή στις πληροφορίες χορήγησης άδειας για το αντικείμενο της αδειοδότησης. Αυτή η αναφορά που απαιτείται σύμφωνα με τη Ρήτρα 4(δ) μπορεί να γίνει με οποιονδήποτε εύλογο τρόπο, υπό τον όρο, όμως, ότι στην περίπτωση Συλλογικού Έργου, κατ' ελάχιστη προϋπόθεση αυτή η αναφορά θα φαίνεται όπου εμφανίζεται οποιαδήποτε άλλη ανάλογη αναφορά δικαιούχου για συγγραφικό δικαίωμα και κατά τρόπο τουλάχιστον τόσο εμφανή όπως αυτή η άλλη ανάλογη αναφορά δικαιούχου για συγγραφικό δικαίωμα. Για την άρση κάθε αμφιβολίας, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις αναφορές που απαιτούνται από αυτή τη Ρήτρα για το σκοπό της πληροφόρησης περί το δικαιούχο πνευματικής ιδιοκτησίας όπως ορίζεται παραπάνω, και επιπλέον κατά την άσκηση των δικαιωμάτων Σας υπό τους όρους αυτής της Άδειας, δεν μπορείτε έμμεσα ή άμεσα να επικαλεστείτε ή εννοήσετε την ύπαρξη οποιασδήποτε σχέσης ή έγκρισης από τον Πρώτο Δημιουργό (Αρχικό Δικαιούχο) ή το Δικαιούχο Συγγενικών δικαιωμάτων, τον Χορηγούντα την Άδεια, ή το Δικαιούχο που αφορά Εσάς ή τις χρήσεις του αντικείμενου της αδειοδότησης από Εσάς, χωρίς ταυτόχρονα να την αποδεικνύετε με ξεχωριστή, έγγραφη άδεια του Πρώτου Δημιουργού (Αρχικού Δικαιούχου) ή του Δικαιούχου Συγγενικών δικαιωμάτων, του Χορηγούντα την Άδεια ή του Δικαιούχου.

δ.Προς άρση κάθε αμφιβολίας, οι περιορισμοί που αναφέρονται παραπάνω [4(α), 4(β), 4(γ)] δεν εφαρμόζονται σ' αυτά τα μέρη του αντικείμενου της αδειοδότησης που περιλαμβάνονται στον ορισμό «Αντικείμενο της αδειοδότησης» αυτής της Άδειας αποκλειστικά επειδή συνιστούν αντικείμενο του δικαιώματος ειδικής φύσης (sui generis) του κατασκευαστή βάσης δεδομένων σύμφωνα με τον Ελληνικό νόμο περί πνευματικής ιδιοκτησίας κατ' εφαρμογή της Οδηγίας 96/9/ΕΟΚ.

ε.Προς άρση κάθε αμφιβολίας, γίνεται δεκτό ότι:

Υποχρεωτικές αδειοδοτήσεις μη δεκτικές παραίτησης: Στην περίπτωση υποχρεωτικών αδειοδοτήσεων στις οποίες δεν είναι δυνατή η παραίτηση (για παράδειγμα, αναφορικά με την είσπραξη αμοιβών για πνευματικά δικαιώματα) ο Χορηγών την Άδεια διατηρεί το δικαίωμα να εισπράττει τέτοιες αμοιβές είτε για εμπορική είτε για μη εμπορική χρήση του αντικειμένου της αδειοδότησης.

Φορείς Συλλογικής Διαχείρισης πνευματικών δικαιωμάτων: Ο Χορηγών την Άδεια παραιτείται από το δικαίωμα να εισπράττει (είτε ατομικά είτε μέσω Οργανισμού Συλλογικής Διαχείρισης πνευματικών δικαιωμάτων, στην περίπτωση που ο Χορηγών την Άδεια είναι μέλος τέτοιου φορέα) αμοιβές για πνευματικά δικαιώματα αναφορικά με μη εμπορικές χρήσεις του αντικειμένου της αδειοδότησης. Ο Χορηγών την Άδεια διατηρεί το δικαίωμα να εισπράττει (είτε ατομικά είτε μέσω Οργανισμού Συλλογικής Διαχείρισης πνευματικών δικαιωμάτων, στην περίπτωση που ο Χορηγών την Άδεια είναι μέλος τέτοιου φορέα) αμοιβές για πνευματικά δικαιώματα αναφορικά με εμπορικές χρήσεις του αντικειμένου της αδειοδότησης.

στ.Όλες οι εξουσίες του ηθικού δικαιώματος παραμένουν αναλλοίωτες στο βαθμό που προβλέπονται στον εφαρμοστέο νόμο και δεν είναι δεκτικές παραίτησης.

5. Δηλώσεις & Εγγυήσεις

ΥΠΟ ΤΗΝ ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΗ ΤΗΣ ΜΗ ΥΠΑΡΞΗΣ ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΑΠΟΔΕΚΤΗΣ, ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗΣ, ΓΡΑΠΤΗΣ ΣΥΜΦΩΝΙΑΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΜΕΡΩΝ, ΚΑΙ ΣΤΟ ΜΕΓΙΣΤΟ ΕΠΙΤΡΕΠΟΜΕΝΟ ΒΑΘΜΟ ΑΠΟ ΤΟ ΕΦΑΡΜΟΣΤΕΟ ΔΙΚΑΙΟ, Ο ΧΟΡΗΓΩΝ ΤΗΝ ΑΔΕΙΑ ΠΡΟΣΦΕΡΕΙ ΤΗΝ ΑΔΕΙΑ ΩΣ ΕΧΕΙ ΚΑΙ ΔΕΝ ΠΡΟΒΑΙΝΕΙ ΣΕ ΔΗΛΩΣΕΙΣ Η ΕΓΓΥΗΣΕΙΣ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ ΕΡΓΟ, ΣΑΦΕΙΣ, ΕΝΝΟΟΥΜΕΝΕΣ, ΘΕΣΜΙΚΕΣ Η ΑΛΛΕΣ, ΣΤΙΣ ΟΠΟΙΕΣ ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΚΑΙ ΟΧΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΤΙΚΑ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΟΝΤΑΙ ΟΙ ΕΓΓΥΗΣΕΙΣ ΤΙΤΛΟΥ, ΕΜΠΟΡΕΥΣΙΜΟΤΗΤΑΣ, ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΕΝΑ ΙΔΙΑΙΤΕΡΟ ΣΚΟΠΟ, ΜΗ-ΠΑΡΑΒΙΑΣΗΣ Η ΑΠΟΥΣΙΑΣ ΚΡΥΦΩΝ Η ΑΛΛΩΝ ΕΛΑΤΤΩΜΑΤΩΝ, ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ Η ΑΠΟΥΣΙΑΣ ΛΑΘΩΝ, ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΙΜΩΝ Η ΟΧΙ. ΣΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΚΑΙΟΔΟΣΙΕΣ ΠΟΥ ΔΕΝ ΕΠΙΤΡΕΠΕΤΑΙ Ο ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΣ ΕΝΝΟΟΥΜΕΝΩΝ ΕΓΓΥΗΣΕΩΝ, ΑΥΤΟΣ Ο ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΣ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΜΗΝ ΕΧΕΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ Σ' ΕΣΑΣ.

6. Περιορισμός ευθύνης

ΥΠΟ ΤΗΝ ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΗ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗΣ ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΗΣ ΡΥΘΜΙΣΗΣ ΑΠΟ ΤΟ ΙΣΧΥΟΝΤΑ ΝΟΜΟ, ΣΕ ΚΑΜΙΑ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Ο ΧΟΡΗΓΩΝ ΤΗΝ ΑΔΕΙΑ ΔΕΝ ΘΑ ΕΥΘΥΝΕΤΑΙ ΕΝΑΝΤΙ ΣΑΣ ΒΑΣΕΙ ΟΠΟΙΟΥΔΗΠΟΤΕ ΝΟΜΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΥ ΠΟΥ ΑΦΟΡΑ ΣΕ ΕΙΔΙΚΕΣ, ΤΥΧΑΙΕΣ, ΠΡΟΚΑΛΟΥΜΕΝΕΣ, ΕΠΙΒΑΛΛΟΜΕΝΕΣ ΩΣ ΠΟΙΝΗ Η ΓΙΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΙΣΜΟ ΖΗΜΙΕΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ ΑΠΟ ΑΥΤΗ ΤΗΝ ΑΔΕΙΑ Η ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΕΡΓΟΥ, ΑΚΟΜΗ ΚΑΙ ΑΝ Ο ΧΟΡΗΓΩΝ ΤΗΝ ΑΔΕΙΑ ΕΙΝΑΙ ΕΝΗΜΕΡΩΜΕΝΟΣ ΓΙΑ ΤΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΠΡΟΚΛΗΣΗΣ ΑΥΤΩΝ ΤΩΝ ΖΗΜΙΩΝ.

7. Καταγγελία

α.Αυτή η Άδεια και τα παρεχόμενα μ' αυτήν δικαιώματα καταγγέλλονται αυτόματα με την παράβαση εκ μέρους Σας των όρων της Άδειας αυτής. Ωστόσο, τα φυσικά ή νομικά πρόσωπα τα οποία έχουν γίνει αποδέκτες Συλλογικών Έργων από Εσάς βάσει της Άδειας αυτής, δεν θα υφίστανται τις συνέπειες της καταγγελίας της άδειάς τους, υπό τον όρο ότι αυτά τα φυσικά ή νομικά πρόσωπα θα συμμορφώνονται πλήρως με αυτές τις άδειες. Οι Ρήτρες 1, 2, 5, 6, 7 και 8 θα παραμείνουν σε ισχύ μετά από κάθε καταγγελία της Άδειας αυτής.

β.Βάσει των ανωτέρω όρων και προϋποθέσεων, η παρούσα Άδεια είναι διαρκής (για όλη τη διάρκεια της ισχύος προστασίας των πνευματικών δικαιωμάτων ή συγγενικών δικαιωμάτων επί του αντικειμένου της αδειοδότησης). Άσχετα με τα ανωτέρω, ο Χορηγών την Άδεια διατηρεί το δικαίωμα να παρέχει το αντικείμενο της αδειοδότησης υπό διαφορετικούς όρους (άδειας) ή να παύσει τη διανομή του αντικείμενου της αδειοδότησης οποτεδήποτε, υπό την προϋπόθεση, ωστόσο, ότι αυτή η επιλογή δεν θα χρησιμεύει στο να καταγγέλλει την Άδεια αυτή (ή άλλη άδεια η οποία χορηγήθηκε ή απαιτείται να χορηγηθεί βάσει των όρων της παρούσας Άδειας) και η Άδεια αυτή θα συνεχίσει να είναι σε πλήρη ισχύ εκτός εάν καταγγελθεί όπως αναφέρεται ανωτέρω.

8. Γενικά

α.Κάθε φορά που διανέμετε ή παρουσιάζετε στο κοινό το αντικείμενο της αδειοδότησης ή ένα Συλλογικό Έργο, ο Χορηγών την Άδεια προσφέρει στον αποδέκτη μια άδεια στο αντικείμενο της αδειοδότησης με τους ίδιους όρους και προϋποθέσεις όπως η άδεια ή οποία χορηγήθηκε σε Εσάς βάσει της παρούσας Άδειας.

β.Αν μια διάταξη της παρούσας Άδειας είναι ανίσχυρη ή δεν είναι δυνατόν να επιβληθεί σύμφωνα με τον ισχύοντα νόμο, αυτό δεν θα θίγει την ισχύ ή την δυνατότητα να επιβληθούν οι υπόλοιποι όροι της Άδειας αυτής, και χωρίς άλλη ενέργεια από τους συμβαλλομένους στο παρόν συμφωνητικό, η διάταξη αυτή θα ανασυνταχθεί στο ελάχιστο αναγκαίο μέτρο για να καταστεί ισχυρή και επιβαλλόμενη μεταξύ των συμβαλλόμενων μερών.

γ.Κανένας όρος ή διάταξη της παρούσας Άδειας δεν θα θεωρείται ότι έχει γίνει αντικείμενο παραίτησης από δικαίωμα και καμία παραβίαση δικαιώματος δεν θα θεωρείται ότι έχει γίνει αποδεκτή, εκτός αν αυτή η παραίτηση από δικαίωμα ή η συγκατάθεση έχουν γίνει γραπτώς και έχουν υπογραφεί από το συμβαλλόμενο μέρος το οποίο χρεώνεται αυτήν την παραίτηση ή συγκατάθεση.

δ.Η Άδεια αυτή περιέχει το κείμενο της συνολικής συμφωνίας μεταξύ των συμβαλλομένων μερών σχετικά με το αντικείμενο της αδειοδότησης για το οποίο χορηγείται άδεια. Δεν υπάρχουν συμφωνίες ή υποσχέσεις σχετικά με το αντικείμενο της αδειοδότησης που να μην ορίζονται στο παρόν. Ο Χορηγών την Άδεια δεν θα δεσμεύεται από πρόσθετες ρήτρες ή όρους που μπορεί να εμφανισθούν σε οποιαδήποτε επικοινωνία μαζί Σας. Η Άδεια αυτή δεν μπορεί να τροποποιηθεί χωρίς αμοιβαία γραπτή συγκατάθεση του Χορηγούντος την Άδεια και Εσάς.

Σημείωμα για τον οργανισμό Creative Commons Corporation

Το νομικό πρόσωπο Creative Commons Corporation δεν είναι συμβαλλόμενο στην παρούσα Άδεια και δεν παρέχει καμία εγγύηση σχετικά με το αντικείμενο της αδειοδότησης. Το νομικό πρόσωπο Creative Commons Corporation δεν ευθύνεται απέναντί Σας ή απέναντι σε άλλο συμβαλλόμενο βάσει οποιουδήποτε νομικού συλλογισμού για ζημίες, στις οποίες ενδεικτικά και όχι περιοριστικά αναφέρονται οποιεσδήποτε γενικές, ειδικές, τυχαίες ή μη ζημίες που μπορεί να σχετίζονται από την άδεια αυτή. Ανεξάρτητα από τις ανωτέρω δύο (2) διατυπώσεις, αν το νομικό πρόσωπο Creative Commons Corporation σαφώς ταυτίζεται με τον Χορηγούντα την Άδεια, θα έχει όλα τα δικαιώματα και υποχρεώσεις του Χορηγούντος την Άδεια.

Κανένας συμβαλλόμενος δεν θα χρησιμοποιεί το εμπορικό σήμα «Creative Commons» χωρίς την προηγούμενη γραπτή συγκατάθεση του νομικού προσώπου Creative Commons Corporation, εκτός αν ο σκοπός της χρήσης είναι να δηλωθεί στο κοινό ότι το αντικείμενο της αδειοδότησης διατίθεται με την άδεια CCPL. Οποιαδήποτε επιτρεπόμενη χρήση του σήματος «Creative Commons» θα είναι σύμφωνη με τις κατευθυντήριες οδηγίες χρήσης εμπορικού σήματος του νομικού προσώπου Creative Commons Corporation όπως θα δημοσιεύεται στο δικό του δικτυακό τόπο ή άλλως όπως θα διατίθενται εκάστοτε κατόπιν αιτήσεως. Προς άρση αμφιβολιών, ο εν λόγω περιορισμός χρήσης του εμπορικού σήματος δεν αποτελεί περιεχόμενο αυτής της Άδειας.

Μπορείτε να επικοινωνήσετε με το νομικό πρόσωπο Creative Commons Corporation στη διαδικτυακή διεύθυνση http://creativecommons.org/.